26:e Städernas turnering, Våren 2005

Grundskola och gymnasium åk 1, O-omgång

Stockholm, den 12 mars

(Inom hackparenteser står den maximala poängen för varje problem. Din totala poängsumma utgörs av de tre uppgifter för vilka du får flest poäng.)

1. Anna och Boris i byarna A respektive B började gå mot varandra (De har konstanta men inte nödvändigtvis samma hastigheter). Om Anna hade startat 30 minuter tidigare, skulle de ha träffats 2 kilometer närmare by B. Om Boris hade gått ut 30 minuter tidigare, skulle de ha träffats närmare by A. Hur mycket närmare? [3 poäng]

2. Lat N vara ett positivt heltal. Visa att något av talen $3N$ och N skrivet decimalt innehåller någon av siffrorna 1, 2, 9. [4 poäng]

3. Pa första raden på ett schackbräde står det 8 likadana vita damer, på sista - 8 likadana svarta damer. Vilket är det minsta antalet drag som behövs for att de vita damerna ska byta plats med de svarta?
En dam kan röra sig lodrätt, vågrätt och diagonalt ett valfritt antal rutor (om det inte finns andra damer i vägen). Vitt och svart turas om att göra drag, en dam förflyttas per drag. [5 poäng]

4. Given är en kvadrat $ABCD$, M och N är mittpunkterna på sidorna BC respektive AD. Man sätter ut en punkt K på fortsättningen av diagonalen AC, närmare A. Sträckan KM skär sidan AB i punkten L. Visa att vinklarna KNA och LNA är lika. [5 poäng]

5. I en viss stad går varje gata antingen från nord till syd eller från ost till väst. En bilist gjorde en åktur en dag och svängde till vänster exakt 100 gånger. Hur många gånger kan han ha svängt till höger, om han aldrig åkte på samma ställe två gånger och kom tillbaka till startpunkten på slutet? (Staden saknar korsningar på olika nivåer, dvs. bröar och tunnlar. Startpunkten är inte en korsning.) [5 poäng]

Lokalt tillägg

6. Är det möjligt at skriva ut talen 1 till 7 runt en cirkel på ett sådant sätt att varje tal är delbart med differensen mellan sina närmaste grannar? [1 poäng]

7. En rektangel är delad i flera andra rektanglar, vilkas omkretsar alla är heltal cm. Är det nödvändigt att omkretsen av den ursprungliga rektangeln också är ett heltal cm? [1 poäng]

8. På Konstrastön bor lögnare och sanningssägare. Sanningssägarna talar alltid sanning, lögnare ljuger alltid. Några invånare påstod att det bor ett jämnt antal sanningssägare på ön, och resten påstod att det bor ett udda antal lögnare på ön. Kan antalet invånare på ön vara udda? [2 poäng]

Städernas turnering finns där: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/ och http://shap.homedns.org/matcir/turgorse/

26:e Städernas turnering, Våren 2005

Gymnasium åk 2,3, O-omgång

Stockholm, den 12 mars

(Inom hackparenteser står den maximala poängen för varje problem. Din totala poängsumma utgörs av de tre uppgifter för vilka du får flest poäng.)

1. I ett koordinatsystem i planet är 4 grafer av typ $y=x^2+ax+b$ utritade, där a, b är talkoefficienter. Man vet att det finns exakt 4 skärningspunkter, i varje skär exakt två grafer varandra. Visa att summan av största och minsta x-koordinaten är lika med summan av andra två. [3 poäng]

2. Alla positiva heltal är skrivna efter varandra på ett oändligt band: 123456789101112... Sedan skär man upp bandet i bitar om 7 siffror. Visa att varje 7-siffrigt tal

a) finns åtminstone på en bit; [3 poäng]

b) finns på oändligt många bitar. [1 poäng]

3. Given är en kvadrat $ABCD$, M och N är mittpunkterna på sidorna BC respektive AD. Man sätter ut en punkt K på fortsättningen av diagonalen AC, närmare A. Sträckan KM skär sidan AB i punkten L. Visa att vinklarna KNA och LNA är lika. [4 poäng]

4. I en viss stad går varje gata antingen från nord till syd eller från ost till väst. En bilist gjorde en åktur en dag och svängde till vänster exakt 100 gånger. Hur många gånger kan han ha svängt till höger, om han aldrig åkte på samma ställe två gånger och kom tillbaka till startpunkten på slutet? (Trafiken är dubbelriktad på varje gata.) [4 poäng]

5. Summan av några positiva tal är 10, och summan av kvadraterna av dessa tal är större an 20. Visa att summan av kuberna av dessa tal är större än 40. [5 poäng]

Lokalt tillägg

6. Visa hur man kan måla en del punkter i planet så att det på varje cirkel med radie 1 cm finns exakt 4 målade punkter. [1 poäng]

7. Är det möjligt at skriva ut talen 1 till 25 runt en cirkel på ett sådant sätt att varje tal är delbart med differensen mellan sina närmaste grannar? [2 poäng]

Städernas turnering finns där: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/ och http://shap.homedns.org/matcir/turgorse/