26:e Städernas turnering, Våren 2005

Stockholm, den 12 mars

Y1. Anna och Boris i byarna A respektive B började gå mot varandra (De har konstanta men inte nödvändigtvis samma hastigheter). Om Anna hade startat 30 minuter tidigare, skulle de ha träffats 2 kilometer närmare by B. Om Boris hade gått ut 30 minuter tidigare, skulle de ha träffats närmare by A. Hur mycket närmare?

Svar. 2 km närmare

Skiss till lösning. Antag att förutom *A*(Anna) och *B*(Boris) startade deras dubbelgångare *a* och *b* en halvtimme tidigare från respektive byarna. De träffade varandra 4 gånger i punkterna *ab*, *aB*, *Ab* och *AB*. Vi vet att avståndet mellan *aB* och *AB* är 2 km. Klart att *a* träffade *b* på samma ställe som *A* träffade *B*, fast en halvtimme tidigare. Då är det samma avstånd från *aB* till *ab,* nämligen *2* km*.* Både *b* och *B* går med samma konstanta hastigheter, således hålls det samma avstånd i timmar och km de emellan. Både för *a* och *A* tar det samma tid att träffa *B* efter mötet med *b* då de närmar sig *B* med samma summa av hastigheter. Såsom *a* och *A* har samma hastigheter tillryggalägger de under denna tid även samma distans. Således är även avståndet från Ab till *AB* lika med 2 km, VSB.

Y2. Lat N vara ett positivt heltal. Visa att något av talen $3N$ och N skrivet decimalt innehåller någon av siffrorna 1, 2, 9.

Skiss till lösning. Om $3N$ innehåller fler siffror än N, då är beginnelsesiffran i $3N$ lika med 1 eller 2. Annars är beginnelsesiffran i N lika med 1,2 (utmärkt!) eller 3. I sista fall är dock beginnelsesiffran i $3N$ lika med 9.

Y3. Pa första raden på ett schackbräde står det 8 likadana vita damer, på sista – 8 likadana svarta damer. Vilket är det minsta antalet drag som behövs for att de vita damerna ska byta plats med de svarta?

En dam kan röra sig lodrätt, vågrätt och diagonalt ett valfritt antal rutor (om det inte finns andra damer i vägen). Vitt och svart turas om att göra drag, en dam förflyttas per drag.

Svar. 23 drag

Skiss till lösning. *Uppskattning.* Betrakta en vertikal rad som inte ligger vid kanten. Där står 2 damer. Den som förflyttas först måste göra minst 2 drag. Damer på 6 sådana rader måste göra således minst 18 drag. Ytterligare 5 drag måste göra de 4 damerna som står vid hörn, då den som förflyttas först måste göra minst 2 drag.

Exempel med 23 drag kan utföras, säg, så här. De 4 vita damer som står närmare mitten och de 4 svarta damer som står närmare hörn skall förflyttas till den motsatta rutan som ligger på andra sidan av schackbrädets medelpunkt (de skall alltså till en annan vertikal rad). Resten skall förflyttas till den motsatta rutan på samma vertikal rad. Här skall vitt göra 12 drag, medan svart skall göra endast 11 drag, då en dam från ett hörn kan förflyttas till en annan vertikal rad med ett enda diagonalt drag. Återstår bara att välja rätt ordning.

Y4. Given är en kvadrat $ABCD$, M och N är mittpunkterna på sidorna BC respektive AD. Man sätter ut en punkt K på fortsättningen av diagonalen AC, närmare A. Sträckan KM skär sidan AB i punkten L. Visa att vinklarna KNA och LNA är lika.

Skiss till lösning. Låt räta linjen AB skära sträckan KN i punkten T. Observera att skärningen med KC delar sträckan MN mitt itu. Då LT är parallellt med MN delar skärningen med KC även sträckan LT mitt itu (Thales’ sats). De rätvinkliga trianglarna ANT och ANL innehåller då de två par lika stora kateter och är kongruenta. Således $\angle LNA = \angle TNA = \angle KNA$.

Y5. I en viss stad går varje gata antingen från nord till syd eller från ost till väst. En bilist gjorde en åktur en dag och svängde till vänster exakt 100 gånger. Hur många gånger kan han ha svängt till höger, om han aldrig åkte på samma ställe två gånger och kom tillbaka till startpunkten på slutet?

Förtydligande. Staden saknar korsningar på olika nivåer, dvs. bröar och tunnlar. Startpunkten är inte en korsning.

Svar. 96 eller 104 gånger

Skiss till lösning. Bilisten gjorde åkturen kring en polygon, således gjorde han exakt ett varv runt sig själv. Varje gång han svängde gjorde han en vridning kvartsvarv antingen till vänster (motsols) eller till höger (medsols). Summan av alla vridningar till höger skulle skilja sig med summan av alla vridningar till vänster exakt ett varv dvs exakt 4 vridningar. Således, om bilisten gjorde ett varv motsols har han svängt till höger 96 gånger, annars 104 gånger.

Lokalt tillägg

Y6. Är det möjligt at skriva ut talen 1 till 7 runt en cirkel på ett sådant sätt att varje tal är delbart med differensen mellan sina närmaste grannar?

Lösning. Ja, till exempel 1, 5, 6, 2, 7 , 3 , 4.

Y7. En rektangel är delad i flera andra rektanglar, vilkas omkretsar alla är heltal cm. Är det nödvändigt att omkretsen av den ursprungliga rektangeln också är ett heltal cm?

Lösning. Nej. Ta till exempel en kvadrat med sidan 2/3 cm. Omkretsen 8/3 cm är inte ett heltal. Dock kan vi dela kvadraten mitt itu i två lika stora rektanglar med omkretsen 2 cm var, vilket är ett heltal.

Y8. På Konstrastön bor lögnare och sanningssägare. Sanningssägarna talar alltid sanning, lögnare ljuger alltid. Några invånare påstod att det bor ett jämnt antal sanningssägare på ön, och resten påstod att det bor ett udda antal lögnare på ön. Kan antalet invånare på ön vara udda?

Skiss till lösning. Nej. Om antalet invånare på ön vara udda skulle antingen båda påståenden vara sanna eller båda osanna. Om båda är sanna då talar alla sanning. Dock måste det finnas lögnare på ön pga deras antal är udda.

Om båda påståenden är osanna då ljög alla. Dock måste det finnas sanningssägare på ön pga deras antal är udda.

Ä1. I ett koordinatsystem i planet är 4 grafer av typ $y=x^2+ax+b$ utritade, där a, b är talkoefficienter. Man vet att det finns exakt 4 skärningspunkter, i varje skär exakt två grafer varandra. Visa att summan av största och minsta x-koordinaten är lika med summan av andra två.

Skiss till lösning. Observera att grafer $y=x^2+ax+b$ och $y=x^2+cx+d$ skär varandra $\Leftrightarrow$ grafer $y=ax+b$ och $y=cx+d$ skär varandra, och att skärningspunkterna har samma x-koordinater (detta följer av att ekvationerna $x^2+ax+b=x^2+cx+d$ och $ax+b=cx+d$ är ekvivalenta). Låt oss byta varje graf av typ $y=x^2+ax+b$ mot en graf av typ $y=ax+b$ med samma a och b. Fortfarande finns det exakt 4 skärningspunkter och i varje skär exakt två grafer varandra. Dock har vi räta linjer istället för parabler! Klart att exakt 4 skärningspunkter kan vi ha omm två par av parallella linjer skär varandra. Skärningspunkterna och sträckor de emellan bildar då en parallellogram. Hörnet med största x-koordinaten ligger mittemot hörnet med minsta x-koordinaten (då ingen av sidorna är parallell med y-axeln). Halvsumman av x-koordinater hos två motsatta hörn är lika med x-koordinaten av medelpunkten i parallellogram. Således är två halvsummorna lika med varandra likaså summorna.

Ä2. Alla positiva heltal är skrivna efter varandra på ett oändligt band: 123456789101112... Sedan skär man upp bandet i bitar om 7 siffror. Visa att varje 7-siffrigt tal

a) finns åtminstone på en bit;

b) finns på oändligt många bitar.

Skiss till lösning. a) Vi visar det för talet 2005312 (allmänt fall är ordagrant detsamma). På bandet finns delen *2005312*0*2005312*1*2005312*2... *2005312*6 (7 grupper med 8 siffror var). I varje grupp hamnar minst en skärning mellan bitarna. Låt det finns $k<7$ siffror före den första skärningen i första gruppen. Då blir det $k–1$ siffror före den första skärningen i andra gruppen osv. Detta medför att ur gruppen *2005312k* skärs ut precis biten med talet 2005312.

b) Delen *2005312*0*2005312*1*2005312*2... *2005312*9 förekommer på bandet oändlig många gånger som beginnelsedelen av långa tal. Varje förekomst ger oss den sökta biten.

Ä3. Se Y4

Ä4. Se Y5.

Ä5. Summan av några positiva tal $S=10$, och summan av kvadraterna av dessa tal $Q>20$. Visa att summan av kuberna av dessa tal $K>40$.

Skiss till lösning. Låt oss visa först att $K\cdot S\geq Q^2$. Betrakta differensen $K\cdot S–Q^2$. Där tar ut de fjärde potenserna varandra, kvar är bara blandade termer. För varje talpar x och y har vi kvar en algebraisk summa $x^3y+xy^3–2x^2y^2$. Den kan vi skriva om som $xy(x-y)^2\geq 0$. Olikheten är således bevisad. Nu har vi $K\cdot 10\geq Q^2>20^2=400$, vilket medför $K>40$.

Lokalt tillägg

Ä6. Visa hur man kan måla en del punkter i planet så att det på varje cirkel med radie 1 cm finns exakt 4 målade punkter.

Skiss till lösning. Rita oändlig många parallella räta linjer med avståndet 1 cm mellan grannar. Måla samtliga punkter på dessa linjer.

Ä7. Är det möjligt at skriva ut talen 1 till 25 runt en cirkel på ett sådant sätt att varje tal är delbart med differensen mellan sina närmaste grannar?

Skiss till lösning. Nej. Observera att ett udda tal är delbar bara med udda tal. Således varje udda tal skall ha en udda och en jämn granne. Detta medför att udda tal måste stå i par. Dock har vi 13 udda tal bland talen 1, 2, ..., 25 och kan inte ställa de 13 tal i par.

Städernas turnering finns där: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/ och http://shap.homedns.org/matcir/turgorse/