26:e Städernas turnering, Våren 2005

Grundskola och gymnasium åk 1, A-omgång

Stockholm/Uppsala, den 9 april

(För en uppgift som består av flera problem får man summan poäng för problemen. Din totala poängsumma utgörs av de tre uppgifter för vilka du får flest poäng.)

1. Två punkter M och N ligger på en graf $y=ax^2+bx+c$, där koefficienterna a,b,c är heltal. Visa att om avståndet MN är ett heltal så är sträckan MN parallell med x-axeln. [4 poäng]

2. I triangeln ABC skär höjderna AA' och BB' varandra i punkten H. Låt X och Y vara mittpunkterna på sträckorna AB resp. CH. Visa att de räta linjerna XY och $A'B'$ är vinkelräta mot varandra. [5 poäng]

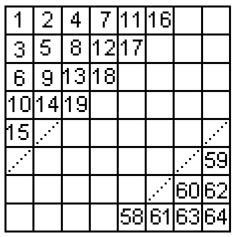
3. Baron Munchausen har en klocka som i princip visar tiden exakt. Problemet är bara att alla siffror och markeringar blev helt osynliga. Man kan bara urskilja timvisaren, minutvisaren och sekundvisaren, som ser olika ut och rör sig kontinuerligt. Baronen ser dock inga problem för att avläsa hur mycket klockan egentligen är. Han påstår att aldrig under dagen (från kl. 8.00 till 19.59) förekommer samma relativa positioner av visarna mer än en gång. Är detta ett sant påstående? [5 poäng]

4. En rutig pappersrektangel av storlek 10×12 viks ihop längs rutkanter tills man fått en enhetskvadrat. Sedan skär man kvadraten längs en sträcka som sammanbinder punkterna på kvadratens kanter. Bestäm antalet delar som man kan få, om skärningssträckan binder samman mittpunkterna
a) på två motsatta sidor; [2 poäng]
b) på två intilliggande sidor? [4 poäng]
(Bestäm alla möjliga svar och visa att det inte finns fler svar.)

5. Det säljes en uppsättning av byggklossar på form av rätblock placerad i en standard låda som också är på form av rätblock. I en makulerad uppsättning råkade varenda byggkloss ha en av kanterna kortare än vad den skulle vara. Kan man vara säker att den makulerade uppsättningen kan placeras i en låda där en av kanterna är kortare än vad den skulle vara? (Byggklossarnas kanter skall vara parallella med lådans kanter.) [6 poäng]

6. Spelarna Tom och Jerry delar på en hög av 25 mynt av valörerna 1, 2, 3, ... , 25 öre i 25 drag. Under ett drag skall den ene peka ut vilket som helst mynt i högen och den andre bestämma vem av dem skall få detta mynt. Det är Tom som pekar under drag 1, sedan pekar den som redan har fått flest öre. Om de har fått lika många öre skall den peka som pekade under förra draget. Kan Tom garanterat få fler öre än Jerry eller kan Jerry i vilket som helst fall förhindra detta? [6 poäng]

7. Rutorna på ett schackbräde av storlek 8×8 är numrerade från 1 till 64 diagonalvis (se bilden). Peter placerade 8 brickor på så sätt att det finns exakt en bricka i varje rad såväl lodrät som vågrät. Sedan flyttade Peter varje bricka till en annan ruta med större nummer. Kan det hända att det fortfarande finns exakt en bricka i varje rad? [8 poäng]



Lokalt tillägg

8. Dela en kvadrat i två polygoner P och Q på så sätt att arean hos P åtminstone är dubbelt så stor än hos Q samtidigt som omkretsen hos Q är åtminstone dubbelt så stor än hos P. [1 poäng]

9. Det fanns 10 på varandra följande heltal. Man har raderat ett av talen och upptäckt att summan av de 9 tal som är kvar är lika med 2005. Bestäm det raderade talet.
[2 poäng]

10. På ön Otur bor 96 medborgare. Regeringen har föreslagit 5 reformer. Varenda reform gör exakt hälften av medborgarna missnöjda. De som blev missnöjda med mer än hälften av reformerna samlades till en demonstration. Bestäm det största möjliga antalet deltagare i demonstrationen. (Hitta ett exempel och visa att antalet inte kan vara större) [3 poäng]

Städernas turnering hemsida: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/ och http://shap.homedns.org/matcir/turgorse/

26:e Städernas turnering, Våren 2005

Gymnasium åk 2och 3, A-omgång

Stockholm/Uppsala, den 9 april

(För en uppgift som består av flera problem får man summan poäng för problemen. Din totala poängsumma utgörs av de tre uppgifter för vilka du får flest poäng.)

1. Två punkter *M* och *N* ligger på en graf av ett polynom med heltalskoefficienter. Visa att om avståndet *MN* är ett heltal så är sträckan *MN* parallell med *x*-axeln. [4 poäng]

2. Cirkeln W_1 går genom medelpunkten hos cirkeln W_2. Genom en punkt *C* på W_1 dras två räta linjer som tangerar W_2, samt skär W_1 andra gången i punkterna *A* resp. *B*. Visa att sträckan *AB* är vinkelrät mot den räta linjen som går genom cirklarnas medelpunkter. [5 poäng]

3. Spelarna Tom och Jerry delar på en hög av 25 mynt av valörerna 1, 2, 3, ... , 25 öre i 25 drag. Under ett drag skall den ene peka ut vilket som helst mynt i högen och den andre bestämma vem av dem skall få detta mynt. Det är Tom som pekar under drag 1, sedan pekar den som redan har fått flest öre. Om de har fått lika många öre skall den peka som pekade under förra draget. Kan Tom garanterat få fler öre än Jerry eller kan Jerry i vilket som helst fall förhindra detta? [5 poäng]

4. Finns det ett andragradspolynom $f(x)$ sådant att för vilket som helst positivt heltal n har ekvationen $f(f(...f(x)))=0$ (n stycken "f") exakt 2^n olika reella rötter? [6 poäng]

5. En reguljär ikosaeder och en reguljär dodekaeder är inskrivna i en och samma sfär. Visa at de är omskrivna kring en och samma annan sfär. (Som bekant begränsas en reguljär ikosaeder av 20 ytor som är kongruenta regelbundna trianglar, i vartenda hörn råkas 5 ytor, intilliggande ytor bildar lika stora kantvinklar. En reguljär dodekaeder begränsas av 12 ytor som är kongruenta regelbundna femhörningar, i vartenda hörn råkas 3 ytor, intilliggande ytor bildar lika stora kantvinklar.) [6 poäng]

6. Låt *a* vara en hörnruta på ett schackbräde av storlek 8×8 och *b* den intilliggande rutan som har exakt ett gemensamt hörn med *a*. Vi betraktar rutter av ett ”slött torn” som går igenom samtliga rutor exakt en gång. Visa att antalet rutter som startar i rutan *a* är större än antalet rutter som startar i rutan *b*. (Ett "slött torn" kan göra drag till en intilliggande ruta både lodrätt eller vågrätt.) [7 poäng]

7. Givna 200 punkter i rymden. Vartenda par av dem är sammanbundet med en separat sträcka, inga av sträckorna skär varandra. Varenda sträcka är målad i en av K färger. Peter fick ett uppdrag att måla även samtliga punkter i de färgerna. Det är förbjudet att ha en sträcka och båda ändpunkterna målad i en och samma färg. Är det säkert att Peter kan utföra uppdraget om

a) K=7; [4 poäng]

b) K=10? [4 poäng]

Lokalt tillägg

8. Hos en andragradsekvation $x^2+px+q=0$ har man utökat båda koefficienterna p och q med 1. Samma operation upprepades 4 gånger. Då har man fått 5 stycken ekvationer. Hitta ett exempel på de ursprungliga värdena av p och q då rötterna av de samtliga ekvationerna är heltal. [1 poäng]

9. En fyrhörning delas av sin vilken som helst diagonal i två liksidiga trianglar. Kan vinkeln mellan diagonalerna vara icke rät? [2 poäng]

10. På ön Otur bor 96 medborgare. Regeringen har föreslagit 5 reformer. Varenda reform gör exakt hälften av medborgarna missnöjda. De som blev missnöjda med mer än hälften av reformerna samlades till en demonstration. Bestäm det största möjliga antalet deltagare i demonstrationen. (Hitta ett exempel och visa att antalet kan inte vara större) [2 poäng]