26:e Städernas turnering, Våren 2005

Problem med facit till A-omgången

Y1. Två punkter M och N ligger på en graf $y=px^2+qx+r$, där koefficienterna p,q,r är heltal. Visa att om avståndet MN är ett heltal så är sträckan MN parallell med x-axeln.

Lösning. Vi flyttar först koordinatsystemet så att origo hamnar i den vänstra av punkterna M och N. I de nya koordinaterna kommer formeln att se ut så här $y=ax^2+bx$, där både a och b är heltal. Den andra punkten kommer då att ha koordinater på formen (m, am^2+bm), där m är ett positivt heltal. Avståndet MN är då avsånd till origo och beräknas enligt Pythagoras sats $\sqrt{m^2+\left(am^2+bm\right)^2}=\sqrt{m^2+m^2(am+b)^2}=m\sqrt{1+(am+b)^2}$. Att avståndet är ett heltal medför att roten i det sista uttrycket är ett rationellt tal. Som bekant är en rot av ett heltal ett rationellt tal omm roten är ett heltal. Det är klart att både N och $\sqrt{1+N^2}$ är heltal endast då $N=0$. Således $am+b=0$, vilket medför att även $am^2+bm=0$. Vi har y–värdena hos de båda punkterna lika stora vilket precis innebär att sträckan MN är parallell med x-axeln.

Y2. I triangeln ABC skär höjderna AA' och BB' varandra i punkten H. Låt X och Y vara mittpunkterna på sträckorna AB resp. CH. Visa att de räta linjerna XY och $A'B'$ är vinkelräta mot varandra.

Lösning. Såsom både AA' och BB' är höjder, är trianglarna $AA'B$, $AB'B$, $CA'H$ och $CB'H$ rätvinkliga. I en rätvinklig triangel ligger hypotenusans mittpunkt på samma avstånd från alla hörn, således $XA'=AB/2=XB'$ och $YA'=CH/2=YB'$. Detta innebär att punkterna X och Y ligger på mittpunktsnormalen till sträckan $A'B'$.

Y3. Baron Munchausen har en klocka som i princip visar tiden exakt. Problemet är bara att alla siffror och markeringar blev helt osynliga. Man kan bara urskilja timvisaren, minutvisaren och sekundvisaren, som ser olika ut och rör sig kontinuerligt. Baronen ser dock inga problem för att avläsa hur mycket klockan egentligen är. Han påstår att aldrig under dagen (från kl. 8.00 till 19.59) förekommer samma relativa positioner av visarna mer än en gång. Är detta ett sant påstående?

Svar. Det är sant.

Lösning. Antag att samma relativa positioner av visarna råkade förekomma en gång till efter tiden T. Då skulle visarnas positioner nu och efter tiden T sammanfalla även för vilket som helst tidsögonblick "nu". Klockan 12 är det enda ögonblick då alla tre visarna träffas (visa detta!), nästa gång de kommer att träffas exakt om 12 timmar. Således är T minst 12 timmar, viket innebär att under dagen hinner samma relativa positioner av visarna inte förekomma mer än en gång.

Y4. En rutig pappersrektangel av storlek 10×12 viks ihop längs rutkanter tills man fått en enhetskvadrat. Sedan skär man kvadraten längs en sträcka som sammanbinder punkterna på kvadratens kanter. Bestäm antalet delar som man kan få, om skärningssträckan binder samman mittpunkterna

a) på två motsatta sidor;

b) på två intilliggande sidor?

(Bestäm alla möjliga svar och visa att det inte finns fler svar.)

Svar.. **a)** 11 och 13. **b)** 31, 36, 37 och 43.

Lösning. a) Låt skärningssträckan gå lodrätt. Drag då lodräta sträckor mellan sidornas mittpunkter i varje ruta. Observera att när man viker ihop rektangel så hamnar de dragna sträckorna på varandra. Således skär man exakt längs de dragna sträckorna. Så får man 11 delar ifall den nedersta sidan av storlek 10 eller 13 delar ifall storlek 12.

b) Observera att varje ruta skärs längs precis en sträcka. Sträckan skär av en triangel med exakt ett av rutans hörn. Samma hörn skärs av samtliga rutor som hörnet hör till. Avskärda hörn bildar ett rutnät med sidan 2 (tänk själv varför). Ett avskärt hörn ligger in en del på form av romb eller triangel. Resten är en sammanhängande del som påminner en måläten matta.

Betrakta en av rutorna. Man kan skära av den vilket som helst av hörnen, sedan bestäms alla andra avskärda hörn entydigt. De ligger antingen på 5 eller på 6 vågräta linjer samtidigt som på antingen 6 eller 7 vågräta linjer. Det ger 4 fall med antingen 5×6 eller 5×7 eller 6×6 eller 6×7 hörn. Antalet delar i respektiva fall är en enhet större pga "måläten matta".

Råd. Rita en bild för vartenda av 4 fallen.

Y5. Det säljes en uppsättning av byggklossar på form av rätblock placerad i en standard låda som också är på form av rätblock. I en makulerad uppsättning råkade varenda byggkloss ha en av kanterna kortare än vad den skulle vara. Kan man vara säker att den makulerade uppsättningen kan placeras i en låda där en av kanterna är kortare än vad den skulle vara? (Byggklossarnas kanter skall vara parallella med lådans kanter.)

Svar. Nej, man kan inte vara säker.

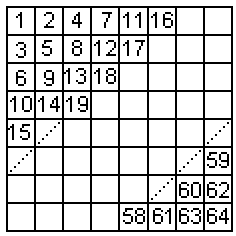
Lösning. Här har en av de enklaste motexempel. Två byggklossar av storlek 1×3×4 placeras i en låda av storlek 2×3×4. Låt oss säga att 4 är höjd, 3 är bredd samt 1 och 2 är tjocklek. Låt oss minska höjden på den ena klossen samt bredden på den andra klossen med 0,1. Man kan inte lådans höjd då det finns en kloss med kant 4. Då båda klossarna har höjd större än 3 skall de placeras i lådan lodrätt. Då deras bredder är större än lådans tjocklek får man inte vrida de. En kloss har bredden 3, således kan man inte ha lådans bredd mindre än 3. Till slut har vi klossarnas totala tjocklek lika med 1+1=2 – precis som lådans ursprungliga tjockleken. Samtliga lådans kanter måste vara desamma.

Utveckling. Bestäm skälv om det blir samma svar ifall varenda byggkloss har *två* kanter kortare än vad de skulle vara.

Y6. Spelarna Tom och Jerry delar på en hög av 25 mynt av valörerna 1, 2, 3, ... , 25 öre i 25 drag. Under ett drag skall den ene peka ut vilket som helst mynt i högen och den andre bestämma vem av dem skall få detta mynt. Det är Tom som pekar under drag 1, sedan pekar den som redan har fått flest öre. Om de har fått lika många öre skall den peka som pekade under förra draget. Kan Tom garanterat få fler öre än Jerry eller kan Jerry i vilket som helst fall förhindra detta?

Svar. Det är Jerry som garanterat kan få flest öre.

Lösning. Observera att den totala summan består av ett ojämnt antal öre, således kan spelet inte sluta oavgjort. Detta innebär att en av spelarna har en vinnande strategi (visa det!). Antag att det är Tom som alltid kan vinna. Betrakta ett läge efter Toms 1:a drag. Hur Jerry än svarar skall Tom ha ett vinnande drag. Bland annat finns det ett sätt för Tom att vinna om Jerry svarar ”Myntet skall till dig, Tom”. Observera dock att om Jerry svarar däremot ”Myntet ska till mig” så hamnar han i samma läge som Tom skulle hamna vid ett mottsatt svar. Då kan Jerry utnyttja Toms strategi och vinna. Motsägelsen visar att Tom saknar en vinnande strategi, således det är Jerry som kan alltid vinna.

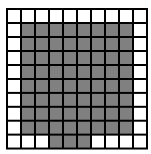


Y7. Rutorna på ett schackbräde av storlek 8×8 är numrerade från 1 till 64 diagonalvis (se bilden). Peter placerade 8 brickor på så sätt att det finns exakt en bricka i varje rad såväl lodrät som vågrät. Sedan flyttade Peter varje bricka till en annan ruta med större nummer. Kan det hända att det fortfarande finns exakt en bricka i varje rad?

Svar. Nej, det kan inte hända.

Lösning. Låt oss införa koordinater på schackbrädet: en ruta som ligger i n-te kolonn från vänster och i m-te rad nerifrån har koordinaterna (n,m). Låt oss beräkna differensen $n–m$ för varje ruta där det finns en bricka och lägga de differenserna ihop. Vi kommer att få 0 därför att summan av de första koordinaterna är 1+2+...+8 (vi har exakt en bricka per kolonn) likaså med summan av de andra koordinaterna. Summan av differenserna ska vara 0 även för vilket som helst annan uppställning där det finns exakt en bricka i varje rad.

Observera nu att differenser är lika på varje diagonal som går höger-uppåt och att ju närmare till det nedersta högra hörnet ligger en diagonal desto större är differensen. När en bricka skall till en ruta med större nummer flyttas den antingen neråt längs samma diagonal (och bibehåller differensen) eller flyttas den till en annan diagonal med en större differens. Den nedersta av brickorna måste lämna sin diagonal, således blir minst en av differenserna större. Så blir även summan av differenserna större, nämligen större än 0. Detta förhindrar att man kan ha exakt en bricka i varje rad efter flyttningen.



Y8. Dela en kvadrat i två polygoner P och Q på så sätt att arean hos P åtminstone är dubbelt så stor än hos Q samtidigt som omkretsen hos Q är åtminstone dubbelt så stor än hos P.

Lösning. Bilden visar hur en rutig kvadrat av storlek 10×10 kan delas. Den svarta delen P har arean 67 och omkretsen 34. Den vita delen Q har omkretsen 68=2·34 och arean 33<67/2.

Y9. Det fanns 10 på varandra följande heltal. Man har raderat ett av talen och upptäckt att summan av de 9 tal som är kvar är lika med 2005. Bestäm det raderade talet.

Svar. 220.

Lösning. Beteckna med x det första av de 10 talen. En summa av 9 tal som är kvar kan vara minst 9x+36 (ifall man har raderat det största talet) och högst 9x+45 (ifall man har raderat det minsta talet). Man kan då skriva en kedja av olikheter

$$9x+36 \le 2005 \le 9x+45 \Leftrightarrow 1960 \le 9\mathrm{x} \le 1969 \Leftrightarrow 217\frac{7}{9} \le x \le 218\frac{7}{9}$$

Det enda heltalet som ligger i intervallet är x=218. Summan av 10 på varandra följande heltal som startar med 218 är 2225, således det raderade talet är 2225–2005=220.

Y10. På ön Otur bor 96 medborgare. Regeringen har föreslagit 5 reformer. Varenda reform gör exakt hälften av medborgarna missnöjda. De som blev missnöjda med mer än hälften av reformerna samlades till en demonstration. Bestäm det största möjliga antalet deltagare i demonstrationen. (Hitta ett exempel och visa att antalet inte kan vara större)

Svar. 80 personer.

Lösning. Beteckna med x antalet personer på demonstrationen. Låt oss titta på det totala antalet av "missnöjen". Å ena sida skapar varje reform exakt 48 missnöjda, således det totala antalet missnöjen är $48\cdot 5=240$. Å andra sida är varje deltagare i demonstrationen missnöjd med minst 3 reformer. Således det totala antalet missnöjen är minst $3x$. Vi får olikheten $240 \geq 3x$, vilket medför $x \leq 80$. Vi ser att antalet deltagare är högst 80.

Låt oss visa ett exempel där antalet deltagare uppnår 80. Vi väljer 80 personer bland invånare och delar de i 5 grupper med 16 personer styck. Låt reform 1 gör missnöjda folk i grupper 1,2,3; reform 2 – i grupper 2,3,4, reform 3 – i grupper 3,4,5, reform 4 – i grupper 4,5,1 reform 5 – i grupper 5,1,2. Då är det exakt $3\cdot 16=48$ personer mot vilken som helst reform, och just de 80 utvalda kommer att delta i demonstrationen.

Ä1. Två punkter M och N ligger på en graf av ett polynom med heltalskoefficienter. Visa att om avståndet MN är ett heltal så är sträckan MN parallell med x-axeln

Lösning. Vi flyttar först koordinatsystemet så att origo hamnar i den vänstra av punkterna M och N. Observera att även i det nya koordinatsystemet anges grafen $y=P(x)$ med ett polynom med heltalskoefficienter i högerled. Då grafen går genom origo saknar polynomet en konstant term. Således $P(x)=xQ(x)$, där $Q(x)$ är också ett polynom med heltalskoefficienter. Koordinater hos den högra punkten är då $(t, P(t))$, där t är ett positivt heltal. Avståndet MN är avståndet från den högra punkten till origo och kan beräknas enligt Pythagoras sats:

$$\sqrt{t^2+(P(t))^2} = \sqrt{t^2+t^2(Q(t))^2} = t\sqrt{1+(Q(t))^2}$$

Att avståndet är ett heltal medför att roten i det sista uttrycket är ett rationellt tal. Som bekant är en rot av ett heltal ett rationellt tal omm roten är ett heltal. Det är klart att både N och $\sqrt{1+N^2}$ är heltal endast då N=0. Således $Q(t)$=0, vilket medför att även. $P(t)$=0. Vi har y–värdena hos de båda punkterna lika stora vilket precis innebär att sträckan MN är parallell med x-axeln.

Ä2. Cirkeln W_1 går genom medelpunkten hos cirkeln W_2. Genom en punkt C på W_1 dras två räta linjer som tangerar W_2, samt skär W_1 andra gången i punkterna A resp. B. Visa att sträckan AB är vinkelrät mot den räta linjen m som går genom cirklarnas medelpunkter.

Lösning. Beteckna med O medelpunkten hos W_2. Som bekant ligger cirkelns medelpunkt på bisektrisen till vinkel som bildas av två tangenter dragna till cirkeln från en och samma punkt. Detta medför att vinklarna OCA och OCB är lika stora. Då båda vinklarna är randvinklar i cirkeln W_1, är såväl bågarna AO och OB av W_1 som kordorna AO och OB lika stora med varandra. Vi ser att punkterna A och B är spegelsymmetriska kring linjen m vilket medför att m är mittpunktsnormalen till sträckan AB.

Ä3. Se problemet Y6.

Ä4. Finns det ett andragradspolynom $f(x)$ sådant att för vilket som helst positivt heltal n har ekvationen $f(f(...f(x)))=0$ (n stycken "f") exakt 2^n olika reella rötter?

Svar: Ja, det finns.

Lösning. Ett exempel på ett sådant polynom är $f(x) = 2x^2–1$. Låt oss visa att det satisfierar alla villkor. Observera först att om polynomets värde $f(c)$ för något c ligger mellan –1 och 1 då ligger även c mellan –1 och 1 (detta pga $-1<2x^2-1<1 \Leftrightarrow 0<x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$). Vi inför beteckning $f_n(x)= f(f(...f(x)))$ (n stycken "f"). Klart att $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$. Låt oss utföra induktionsbevis till ett mer generellt påstående: om $-1<c<1$, då har ekvationen $f_n(x)=c$ exakt 2^n olika reella rötter, som alla ligger på intervallet (–1,1). Induktionsbas för n=1 kan man lätt se detta på en graf. Antag att vi har bevisat påståendet för $n=k$. Låt oss bevisa för $n=k+1$. Ekvationen $f_{k+1}(x)=c$ (där $-1<c<1$) är ekvivalent med ekvationen $f(f_k(x))=c$, vilken i sin tur kan splittras i två ekvationer $f_k(x)=a$ och $f_k(x)=b$, där $-1<a<1$ och $-1<b<1$ är rötterna till ekvationen $f(x)=c$. Både $f_k(x)=a$ och $f_k(x)=b$ har enligt antagandet exakt 2^k olika reella rötter på intervallet (–1,1). De två uppsättningarna har inga gemensamma rötter då funktionen $f_k(x)$ antar olika värden på rötter ur olika uppsättningar. Således har ekvationen $f_{k+1}(x)=c$ exakt $2^k+2^k=2^{k+1}$ olika reella rötter på intervallet (–1,1), VSB.

Ä5. En reguljär ikosaeder och en reguljär dodekaeder är inskrivna i en och samma sfär. Visa at de är omskrivna kring en och samma annan sfär. (Som bekant begränsas en reguljär ikosaeder av 20 ytor som är kongruenta regelbundna trianglar, i vartenda hörn råkas 5 ytor, intilliggande ytor bildar lika stora kantvinklar. En reguljär dodekaeder begränsas av 12 ytor som är kongruenta regelbundna femhörningar, i vartenda hörn råkas 3 ytor, intilliggande ytor bildar lika stora kantvinklar.)

Skiss till lösning. För att skriva kortare låt oss hela tiden utelämna ordet ”reguljär”. Då ikosaeder och dodekaeder är duala mot varandra, kan man skriva in de i en och samma sfär på så sätt, att radier dragna till hörn av den ena går genom medelpunkter av den andras ytor och tvärtom. Betrakta en likbent triangel OAB som bildas av två radier: OA går genom medelpunkt av dodekaederns yta och OB är dragen till något hörn som hör till ytan. Radien OA är vinkelrät mot ytan, vilket medför att ytan skär triangeln OAB längs triangelns höjd BH. Klart att OH är en radie av sfären inskriven i dodekaedern. Pga att ikosaeder och dodekaeder är duala gäller samtidigt att OB går genom medelpunkt av ikosaederns yta, OA är dragen till ytans hörn, ytan skär triangeln OAB längs triangelns höjd AK och OK är en radie av sfären inskriven i ikosaedern. Likheten OH=OK följer av att triangeln OAB är likbent.

Ä6. Låt A vara en hörnruta på ett schackbräde av storlek 8×8 och B den intilliggande rutan som har exakt ett gemensamt hörn med A. Vi betraktar rutter av ett ”slött torn” som går igenom samtliga rutor exakt en gång. Visa att antalet rutter som startar i rutan A är större än antalet rutter som startar i rutan B. (Ett "slött torn" kan göra drag till en intilliggande ruta både lodrätt eller vågrätt.)

Lösning. Idé till beviset är följande. Till vilken som helst rutt som startar i *B (B*-rutt*)* kommer vi *att* ordna en rutt som startar från *A (A*-rutt*)*, på så sätt att det ordnas olika *A*-rutter till olika *B*-rutter. I så fall blir det klart att det finns minst så många *A*-rutter som *B*-rutter. Sedan ska vi uppvisa en *A*-rutt som saknas bland de tillordnade rutter.

Observera först att det finns lika många *A*-rutter som slutar i *B* som *B*-rutter som slutar i *A*. Vidare ska vi inte betrakta sådana rutter. Vi använder en vanlig schacknotation: kolonner markeras med bokstäverna *abcdefgh* från vänster till höger, raderna – med siffrorna 1 till 8 nerifrån, rutorna – med par ”bokstav och siffra”. Låt *A*=*a*1, *B*=*b*2. Betrakta en B-rutt. Den andra ruta på rutten kan vara antingen *a*2 eller *b*3 eller *c*2 eller *b*1. Det räcker att gå igenom de två första fall, de övriga är helt analogiska. Om en rutt börjar B-a2 och inte slutar med a1 då ska den börja med B-a2-*a*1-*b*1-*c*1 ... . Till en sådan rutt ordnar vi rutten till СопоA-*a*2-*b*2-*b*1-*c*1... (rutterna sammanfaller efter *c*1). L[t oss betrakta flera fall då rutter börjar med B-*b*3 och inte slutar med -a1. Med punkter markerar vi delarna som sammanfaller i såväl ursprungliga som tillordnade rutt.

1) Till B-*b*3-…-*c*1-*b*1-*a*1-*a*2 ordnas *A*-*a*2-*b*2-*b*3-…-*c*1-*b*1.
2) Till B-*b*3-…-*a*3-*a*2-*a*1-*b*1 ordnas *A*-*b*1-*b*2-*b*3-... -*a*3-*a*2.
3) Till B-*b*3-…-*a*3-*a*2-*a*1-*b*1-*c*1 ... ordnas *A*-*a*2-*a*3-…-*b*3-*b*2-*b*1-*c*1-....
4) Till B-*b*3-…-*c*1-*b*1-*a*1-*a*2-*a*3 ... ordnas *A*-*b*1-*c*1... *b*3-*b*2-*a*2-*a*3-....

Vi har åstadkommit en-to-en motsvarighet mellan samtliga B-rutter och några A-rutter. Observera nu att bland de tillordnade A-rutter saknas en rutt som går genom schackbrädet ”spiralvis”.

Städernas turnering finns där: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/ och http://shap.homedns.org/matcir/turgorse/

Ä7. Givna 200 punkter i rymden. Vartenda par av dem är sammanbundet med en separat sträcka, inga av sträckorna skär varandra. Varenda sträcka är målad i en av K färger. Peter fick ett uppdrag att måla även samtliga punkter i de färgerna. Det är förbjudet att ha en sträcka och båda ändpunkterna målad i en och samma färg. Är det säkert att Peter kan utföra uppdraget om

a) K=7;

b) K=10?

a). Lösning. Vi visar med induktion att om det finns n färger och minst 2^n punkter, då kan man måla sträckorna på så sätt att det blir omöjligt att utföra uppdraget. Induktionsbas är klar för n=1. Antag att vi har redan bevisat påståendet för n–1 färg, låt oss bevisa för n färger. Dela punkterna i två delmängder med minst 2^{n-1} punkter var. Måla "inre" sträckorna i båda delmängder i n–1 färg enligt induktionsantagande. Måla sträckor som binder samman punkter ur olika delmängder i den sista färgen. Låt Peter målar punkterna hur som helst. Om någon av delmängderna saknar punkter av sista färg finns där en förbjuden sträcka enligt induktionsantagande. Om punkter av sista färg finns i båda delmängder då är de sammanbundna med en förbjuden sträcka.

b). Skiss till lösning. Låt oss visa att man kan måla 121 punkter på så sätt som gör Peters uppdrag omöjligt. Markera punkterna med talpar (a, b), där a och b är heltal från 1 till 11. För k=0, ... ,9 målar vi sträckan med ändpunkter (a_1, b_1) och (a_2, b_2) i färg k+1 omm $(a_2 - a_1) - k(b_2 - b_1)$ är jämnt delbart med 11 (detta är möjligt pga 11 är ett primtal). Detta sätt att måla innehar en viktig egenskap: om sträckor PQ och PR är av samma färg då är även sträckan QR av samma färg. Detta medför att för vilken som helst färg delas punkterna i ett antal delmängder på så sätt att punkter i en och samma delmängd är sammanbundna med sträckorna av denna färg. För vilka som helst a_1, b_1, b_2 (där $b_2 \neq b_1$) finns det exakt ett varde på a_2 sådant att sträckan med ändpunkterna (a_1, b_1) och (a_2, b_2) är målad i denna färg. Detta medför att för viken som helst färg delas punkterna i exakt 11 delmängder med 11 punkter var. Låt oss komma ihåg de indelningarna. Det finns en del omålade sträckor, de kan vi måla hur som helst.

Låt nu Peter att måla punkterna hur som helst. Pga lådprincipen kan man hitta minst 12 punkter av en och samma färg F. Betrakta indelningen som svarar mot F. Pga lådprincipen hamnar ett par punkter i en och samma delmängd. De är sammanbundna med en förbjuden sträcka.

Dock har 200 punkter givna, inte 121 punkter. Lätt som plätt! Välj bland de 121 punkter, måla sträckorna de emellan, resten måla hur som helst – det skulle räcka att förhindra Peters uppdrag.

Ä8. Hos en andragradsekvation $x^2+px+q=0$ har man utökat båda koefficienterna p och q med 1. Samma operation upprepades 4 gånger. Då har man fått 5 stycken ekvationer. Hitta ett exempel på de ursprungliga värdena av p och q då rötterna av de samtliga ekvationerna är heltal.

Lösning. Till exempel, kan man starta med ekvationen $x^2+3x+2=0$ som har rötterna –1 och –2. Operationen omvandlar den i ekvationer av typen $x^2+(r+1)x+r=0$ som har rötterna $-r$ och $-(r+1)$.

Ä9. En fyrhörning delas av sin vilken som helst diagonal i två liksidiga trianglar. Kan vinkeln mellan diagonalerna vara icke rät?

Svar. Ja, det kan hända.

Lösning. Ta till exempel en parallelltrapets som en diagonal skär av en regelbunden femhörning. Parallelltrapetsen är likbent, den minsta basen är lika med två andra sidor, diagonalerna är lika med den största basen. Här bildar diagonalerna vinkeln 72º –– vilket kan lätt avläsas ur den ursprungliga regelbundna femhörningen.

Utveckling. Utforska själv om det finns andra exempel där vinkeln mellan diagonalerna är icke rät.

Ä10. Se problem Y10**.**

Städernas turnering finns där: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/ och http://shap.homedns.org/matcir/turgorse/