28:e Städernas turnering, Hösten 2006

Grundskola och gymnasium, O-omgång

Stockholm, den 11 november

(Inom hakparenteser [] står den maximala poängen för varje problem. Din totala poängsumma utgörs av de tre uppgifter för vilka du får flest poäng. Sedan multipliceras summan med 4/3, 1, 4/5 eller ¾ beroende på om du går i 9:an, åk 1, åk 2 eller åk 3.)

1. Två positiva heltal x och y ($x \le y$) står på tavlan. Plurre kvadrerar det minsta av talen och antecknar resultatet x^2 på en papperslapp. Sedan byter Plurre det största talet y på tavlan mot talens differens y-x. Med det nya paret positiva heltal gör Plurre samma sak: kvadrerar det minsta av talen, antecknar resultatet på samma papperslapp och byter det största av talen mot talens differens. Så fortsätter han tills ett av talen på tavlan blir 0. Bestäm summan av talen som då står nedskrivna på papperslappen. [4 poäng]

2. På en ö bor lögnare, sanningssägare och politiker. Lögnare ljuger hela tiden, sanningssägare talar bara sanning, medan politiker svarar hur de vill. Du får ställa frågor som man kan svara antingen "Ja" eller "Nej" på (t.ex. "Är det sant att denne är en politiker?").

a) Du har träffat tre personer. Du vet att bland dem finns en lögnare, en sanningssägare och en politiker, samt att de alla vet vem som är vad. Hur kan även du, genom ja-och-nej-frågor, ta reda på vem som är vad. [1 poäng]

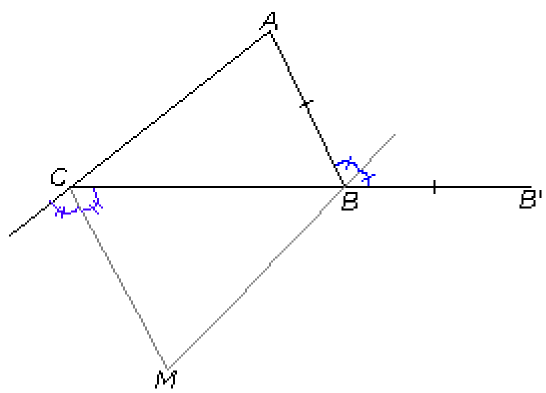
b) Du har träffat fyra personer. Du vet att bland dem finns en lögnare, en sanningssägare och två politiker, samt att de alla vet vem som är vad. Visa att politikerna kan komma överens om att svara på ett sådant sätt att det blir omöjligt för dig att säkert ta reda på vad någon av personerna är. [3 poäng]

3. Vi kallar ett positivt heltal *trevligt* om detta tal är lika med m^2–n^2 där m och n är några positiva heltal. Om vi har en uppsättning av heltal kallar vi ett tal *en bra medlem* om produkten av de övriga talen i uppsättningen är ett trevligt tal.

a) Visa att i vilken som helst uppsättning av 2007 stycken positiva heltal större än 1 finns det minst en bra medlem. [2 poäng]

b) En uppsättning består av talet 2006 och ytterligare 2006 stycken heltal större än 1. Det har visat sig att endast ett av dessa tal är en bra medlem. Visa att det är talet 2006. [2 poäng]

4. Givet en triangel ABC. På BC:*s* förlängning utanför B markeras punkten B' sådan att BB' är lika lång som AB. Bisektriserna till yttervinklarna med spetsarna B och C skär varandra i punkten M. Visa att det finns en cirkel som alla fyra punkterna A, B', M, C ligger på. [4 poäng]



5. En kvadrat delas in i kongruenta icke-konvexa polygoner vars sidor är parallella med kvadratens sidor. Ingen polygon är en parallellförflyttning av någon annan. Bestäm det största möjliga antalet sådana polygoner. (Vid en parallellförflyttning får figurer ej vridas eller speglas). [4 poäng]

Lokalt tillägg

6. Rita en figur som man kan klippa itu till såväl tre kongruenta trianglar som fyra kongruenta fyrhörningar. [1 poäng]

7. Samuel har 5 DVD-skivor med låtar. Han brukar ta med sig 2 DVD valda på måfå. Han prövade alla kombinationer av 2 DVD och det visade sig att han alltid hade med sig antingen 75 eller 88 eller 101 låtar. Bestäm antalen låtar på var och en av DVD-skivorna. Motivera ditt svar. [2 poäng]

Städernas turnering finns här: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/