28:e Städernas turnering, Hösten 2006

Grundskola och gymnasium, A-omgång

Stockholm, den 25 november

(Inom hackparenteser [] står den maximala poängen för varje problem. Din totala poängsumma utgörs av de tre uppgifter för vilka du får flest poäng. Sedan multipliceras summan med $^4/_3$, 1, $^4/_5$ eller ¾ beroende på om du går i 9:an, åk 1, åk 2 eller åk 3.)

1. Till en regelbunden 7-hörning dras både en omskriven och en inskriven cirkel och vi betraktar det cirkulära (ringliknande) området mellan de två cirklarna. På samma sätt gör vi med en regelbunden 17-hörning. Det visar sig att de båda områdena har samma areor. Visa att polygonerna har lika långa sidor. [3 poäng]

2. När Ture Sventon hamnar i ett nytt sällskap reder han ut vilka i sällskapet som är nära bekant med varandra. För att memorera detta ritar han en cirkel och betecknar sällskapmedlemmarna med kordor. Om två kordor skär varandra innebär detta att personerna de representerar är nära bekanta. Om två kordor inte har några gemensamma punkter så är personerna inte nära bekanta med varandra. Ture tror att ett sådant diagram kan göras för vilket sällskap som helst. Har han rätt? (Kordor skär varandra även om de har en gemensam ändpunkt). [5 poäng]

3. 9 tal a,b,c,d,e,f,g,h,i står i tabellen av formatet 3×3 (se bilden). Det är känt att tabellen är en magisk kvadrat, d.v.s. att summan i varje horisontell rad, vertikal kolumn och diagonal alltid blir densamma. Visa att

a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

a) $2(a+c+g+i)=b+d+f+h+4e$ [3 poäng]
b) $2(a^3+c^3+g^3+i^3)=b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$ [3 poäng]

4. En cirkel med radie R är inskriven i en spetsvinklig triangel. Tre tangenter till cirkeln är dragna på ett sådant sätt att de delar den spetsvinkliga triangeln i tre rätvinkliga trianglar och en sexhörning som har omkrets Q. Tre mindre cirklar är inskrivna i de tre rätvinkliga trianglarna. Bestäm summan av de tre cirklarnas diametrar. [6 poäng]

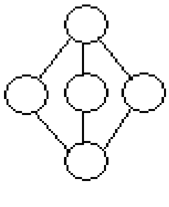
5. Givet en platt kvadratisk tavla med sidan 1.Ett rektangulärt ark papper kallas tavlans *omslag* om det har arean *2* och man kan slå in tavlan helt i det på båda sidor (utan att klippa i arket). Naturligtvis är både rektangeln med sidorna 1 och 2 respektive kvadraten med sidan $\sqrt{2}$ omslag.
a) Visa att det finns ett omslag med en annan proportion. [4 poäng]
b) Visa att det finns oändligt många omslag med olika proportioner. [3 poäng]

6. Låt $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, där $\frac{a_n}{b_n}$ är ett bråk som ej kan förkortas. Visa att det finns oändlig många positiva heltal n sådana att $b_{n+1}< b_n$. [8 poäng]

7. En programledare har en kortlek med 52 kort. Åskådarna skall bestämma i vilken ordning korten ligger (utan att precisera om följden går uppifrån och ner eller tvärtom). De får ställa frågor till programledaren av typen ”Hur många kort ligger mellan det kortet och det kortet (säg, mellan spader ess och klöver dam). En av åskådarna råkade tidigare tjuvtitta på kortens ordning och memorerade den. Bestäm det minsta antal frågor som denne behöver ställa (så att alla hör svaret) för att det skall vara möjligt för de övriga åskådarna i salen att räkna ut ordningen. [9 poäng]

Lokalt tillägg

(poäng för dessa uppgifter tillgodoräknas endast inom Sverige)



8. Kan man skriva fem heltal i de tomma cirklarna på ett sådant sätt att i alla par som är sammanbundna med en linje är det ena av talen jämnt delbart med det andra talet, medan inget av talen är delbart med något av talen som det inte är direkt sammanbundet med? [1 poäng]

9. Tom och Jerry delar på fyra bitar korv vars vikter de känner till. Först väljer Tom ut vilken som helst av bitarna och antingen tar den åt sig själv eller ger den till Jerry. Sedan gör Jerry detsamma med vilken som helst av de bitar som är kvar. Så fortsätter de i tur och ordning tills någon av dem får två bitar, då får den andre den eller de bitar som är kvar. Hur skall Tom gå till väga för att få minst lika mycket korv (viktmässigt) som Jerry? Gå igenom alla fall och motivera ditt svar. [2 poäng]

Städernas turnering finns här: http://servus.matematik.su.se/matcir/turgorse/