

Lektion 2: Periodiska talföljder. Cirkelprocesser.

Upp1. Bestäm den 100:e siffran efter kommatecknet i decimalutvecklingen av talet $1/7$.

Prob2. Bestäm slutsiffran i talet $333^{333^{333}}$.

Definition. En talföljd $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ kallas *periodisk* med perioden T om det gäller $a_{n+T} = a_n$ för alla n . Det kan hända att ett antal termer bryter mot regeln, dvs att regeln gäller för alla $n \geq k$. I sådana fall kallas talföljden en *periodisk* med preperiod $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$.

Upp3. Visa att summan (diffensen, produkten, kvoten) av två periodiska talföljder är också en periodisk talföljd.

Sats 4. En del termer stryks bort ur en periodisk talföljd $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ så att endast termer $a_N, a_{N+d}, \dots, a_{N+kd}, \dots$, finns kvar (för några positiva heltal N och d). Då är den erhållna talföljden periodisk även den.

Prob5. Bestäm den minsta möjliga perioden hos summan av två periodiska talföljder med minsta perioder 4 och 12.

Sats 6. Ett reellt tal r utvecklas i ett periodiskt decimalbråk $\Leftrightarrow r$ är ett rationellt tal.

Upp7. Visa att summan av två periodiska decimalbråk är ett periodiskt decimalbråk.

Prob8. Visa att det oändliga bråket $0,123456789101112\dots20052006\dots$ är ett irrationellt tal.

Prob9. Avgör om talföljden $a_n = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ är periodisk eller ej (här $\lfloor x \rfloor$ står för heltalsdelen av x)

Prob10. Ture Sventon har skrivit ett datorprogram till en dator som har ett begränsat minne. Programmet skriver ut siffror i rad, 100 siffror per sekund. Ture lovar att om datorn ska få räkna oändligt länge så kommer den att skriva ut exakt den hela decimalutvecklingen av talet $\sqrt{2}$. Ska man tro på Ture?

Cirkelprocessprincipen. Om ett system kan vara i ett ändligt antal tillstånd och det aktuella tillståndet beror på ett visst antal föregående tillstånd så är följden av systemets tillstånd periodisk.

Prob11. En talföljd är definierad av rekursionsformeln $a_{n+1} = s(a_n)^2 + 1$, (där $s(x)$ är siffersumman av x). a_1 är ett positivt heltal. Visa att talföljden är periodisk.

Hemläxan

Prob12. Bestäm den minsta möjliga perioden hos summan av två periodiska decimalbråk med minsta perioder 4 och 12.

Prob13. En ändlig talföljd består av N termer (bland dem finns olika) och är periodisk med perioder

a) både 13 och 14;

b) både p och q (där p och q är relativt prima).

Bestäm det största möjliga värdet på N .

Prob14. Den oändliga Morse-följden består av nollor och ettor: $0110100110010110\dots$. Den bildas steg för steg så här: först 0, sedan vid varje steg skrivs till en bit av samma längd som fås genom byte 0 till 1 och 1 till 0 ut av den delen som redan finns.

a) Bestäm siffran på den 2006:e platsen.

b)* Är Morse-följden en periodisk?

Prob15* En talföljd är definierad av rekursionsformeln $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$ och $0 \leq x_1 \leq 1$. Visa att talföljden är periodisk $\Leftrightarrow x_1$ är ett rationellt tal.