

Непрерывная логика

1. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в нуль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т.д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?
2. Петя хочет найти на магнитофонной записи часового концерта определенный момент (точку на ленте). Магнитофон может перемотывать в обе стороны со вдесятеро большей скоростью. Петя заранее не знает даже примерно, где нужное место, но прослушав полминуты подряд, он либо обнаружит нужный момент, либо определит, раньше он был или позже. В начале лента стоит на начале концерта. Может ли Петя с гарантией найти момент менее, чем за 10 минут?
3. Даны два квадратных уравнения вида $ax^2+bx+c=0$. Рассматриваются всевозможные уравнения, которые получаются, если к первому несколько раз прибавить второе. Среди них оказалось бесконечно много уравнений с целым корнем. Докажите, что исходные уравнения имеют общий целый корень.
4. Могут ли среди значений квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами при целых значениях аргумента встретиться все натуральные степени тройки?
5. В неравенстве $x^2+px+q>0$ коэффициенты p и q – целые. Неравенство выполнено при всех целых x . Докажите, что оно выполнено при всех действительных x .
6. Несколько точек разбивают окружность на дуги. По окружности прыгает блоха. Перед каждым своим прыжком она вычисляет длину дуги, на которой находится, а затем прыгает так, чтобы сместиться по часовой стрелке на дугу вычисленной длины. (Считается, что точка на границе двух дуг принадлежит дуге по ходу часовой стрелки от этой точки.) Докажите, что блоха сможет побывать
 - а) лишь в конечном числе мест;
 - б) на всех дугах.
7. В вершинах куба выписаны числа, а на каждом ребре – сумма чисел в его концах. Назовем *округлением* замену нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), а целое пусть при округлении не меняется. Докажите, что можно все 20 чисел округлить так, чтобы по-прежнему на каждом ребре стояла сумма чисел в его концах.
8. За праздничным столом должно собраться $n>2$ человек, и хозяйка режет торт на n частей. Она знает, однако, что один из гостей может не прийти, и тогда кому-то достанется два куска торта. Хозяйка хочет, чтобы в обоих случаях наибольшая порция была не более чем в a раз больше наименьшей. При каком наименьшем a она сможет этого добиться?
9. Отец с двумя сыновьями отправились навестить бабушку, которая живет в 33 км от города. У отца есть мотороллер, скорость которого 25 км/ч, а с пассажиром – 20 км/ч (двух пассажиров на мотороллере перевозить нельзя). Каждый из братьев идет по дороге со скоростью 5 км/ч. Как им надо действовать, чтобы через 3 часа всей компанией оказаться у бабушки?
10. На острове Гдетотам расстояние между любыми городами 100 км. Местность, от которой до ближайшего гдетотамского города больше 40 км, считается провинцией. Раньше более 90% территории Гдетотама было провинцией, пока на этом острове не был построен еще один город. Может ли теперь провинция составлять менее 10% территории Гдетотама?