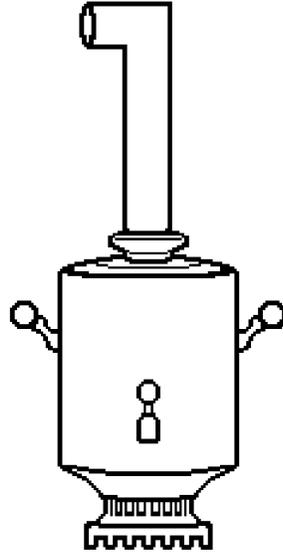


Летняя конференция
мудреца и королевы



ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР ТУРНИРА ГОРОДОВ

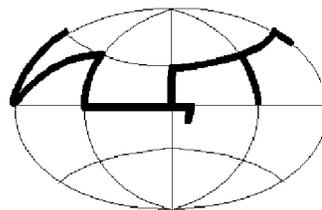
**ВОСЬМАЯ
ЛЕТНЯЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ТУРНИРА
ГОРОДОВ**

Задачи

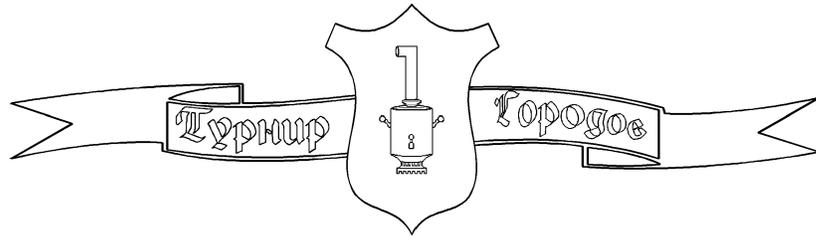
Решения

Участники

Результаты



Москва 1997



Содержание

Введение	4
Участники	17
Условия задач	24
Задача 1. Внешний бильярд вокруг многоугольника	24
Задача 2. Диофантовы уравнения для многочленов .	29
Задача 3. Сортировка железнодорожных составов .	31
Задача 4. Классификация гибких кривых и инварианты узлов	39
Задача 5. Полимино	48
Задача 6. Двойные сети	51
Результаты участников	55
Решения задач и комментарии	71
Задача 2.	71
Задача 3.	76
Задача 4.	100
Задача 6.	107

Задача 6.

Предложенная задача была исследовательской в полном смысле этого слова: автор придумал понятие и знал ответы только на самые простые вопросы. Сложные вопросы ставились отчасти наугад. На промежуточном финише автор согласился с мнением наиболее продвинувшихся школьников, что стоит сосредоточиться на задачах о вырожденных и красивых двойных сетях на плоскости, опустив общий случай как необъятный и не слишком содержательный. Не увенчалась успехом и попытка найти аналог красивых двойных сетей в пространстве. Поэтому решения пунктов 1 д), 4, 5 в) и 6 здесь не приводятся.

Наиболее принципиальный результат — полная классификация красивых двойных сетей — был получен участницей конференции Ириной Анно (г. Москва, школа №57). Ей же принадлежат примеры с красивым шестиугольником, и несколько конструкций регулярных двойных сетей в пространстве, развеявших ожидания их разумной классификации.

Приведенное ниже доказательство о классификации в значительной мере опирается на идеи Ирины Анно; некоторые моменты взяты из работы Евгения Головина (г. Набережные Челны, школа №26).

0. а) Треугольники и параллелограммы. Кроме того, из любого треугольника можно сделать вырожденный четырехугольник, добавив вершину на любой из сторон: добавим в треугольнике ABC вершину D на стороне BC так, чтобы $AB + BD = AC + CD$.

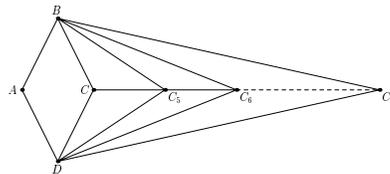


Рис. 1.

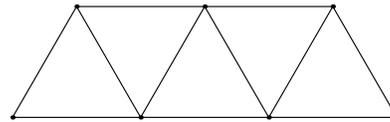


Рис. 2.

0. в) См. рис. 1 ($ABCD$ — ромб).

1. а) См. рис. 2 (все 5 треугольников — правильные).

1. б) Ответ: не более 3.

Доказательство. Предположим противное. Тогда есть не менее 5 вершин. Пусть прямая l проходит через наибольшее число вершин, назовем ее осью. Если на оси ровно 2 вершины, получим 5 точек на плоскости, соединенных непересекающимися отрезками, что невозможно.

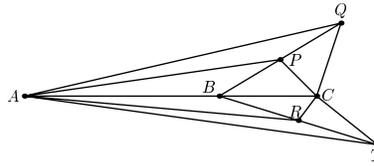


Рис. 3.

Среди четырех вершин вне оси есть по крайней мере две по одну сторону от оси; обозначим ближайшую к оси P , следующую Q , и третью и четвертую точки вне оси — R и T . Пусть на оси найдутся три вершины. Выберем три соседних и обозначим их по порядку A , B и C . Тогда QB пересекается с ломаной APC только в точке P — иначе точка пересечения ближе к оси, чем P . Допустим, на оси еще точка D , причем C находится между B и D . Тогда Q должна лежать также и на CP , что невозможно. Итак, на каждой прямой лежит не более трёх вершин, в частности на оси — только A , B и C . Допустим, найдутся три точки по одну сторону от оси, скажем, R лежит с той же стороны, что P и Q . Тогда R лежит на BP , и мы получаем четвертую точку на прямой BP — противоречие. Итак, P и Q — по одну сторону, а R и T — по другую сторону оси, причем ни R ни T не лежат на BP . Выберем R ближайшей к оси, а T — следующей по удаленности (см. рис. 3). Тогда снова B , R и T лежат на одной прямой, не совпадающей с BP . Отрезок QR пересекает контур треугольника ACT . Если он пересечет AT или CT , мы получим вершину, ближе к оси чем R . Если он пересечет AC не в A , B или C , мы получим на оси четвертую вершину. Если он

пересечет в B , мы получим, что R лежит на BQ — четвертая точка. Осталась возможность пересечь AC в одном из концов, скажем в C . Но тогда объявим QR новой осью; вершины P , B и A лежат по одну сторону от нее, что, как показано выше, ведет к противоречию. На рис. 4 приведен пример вырожденной ДС максимально возможной нелинейности 3.

1. г) 4 и любое число больше 5. Параллелограмм — для 4 вершин, и полоска из $n - 2$ равных правильных треугольников — для $n > 5$ вершин (см. рис. 5).

2. Можно. Впишем 5-угольник $ABCDE$ в параллелограмм с вершиной A и сторонами, параллельными AB и AE , и проведем через каждую вершину 5-угольника отрезки внутри параллелограмма, параллельные его сторонам (см. рис. 6).

3. а) *Указание.* Если две вершины лежат внутри многоугольника, и некоторый путь между ними выходит за пределы многоугольника, то этот путь — не кратчайший: заменив участок вне многоугольника на участок, идущий по границе, мы путь укоротим.

3. б) *Указание.* Докажите, что если A , B и C — три последовательные вершины многоугольника, и внутренний угол ABC не меньше развернутого, то среди лежащих внутри многоугольника путей из A в C путь ABC — единственный кратчайший.

3. в) **5. а)** **5. б)** Дадим полную классификацию

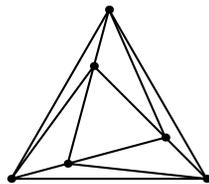


Рис. 4.

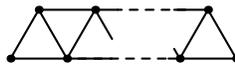


Рис. 5.

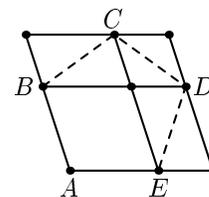


Рис. 6.

(см. рис. 7–10) красивых двойных сетей (КДС), по ходу получим ответы на пункты 3 в) и 5 а).

Ответ 3в): Любой красивый параллелограмм длины $n = 1$ или $n > 2$ и красивый шестиугольник.

Ответ 5а): 6 направлений (в красивом шестиугольнике).

Ответ 5б): Все перечисленные рис. 7–10 сети, а также все их выпуклые невырожденные подсети.

Ключевые примеры КДС:

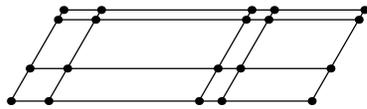


Рис. 7.

Клетчатый параллелограмм: параллелограмм, разбитый на меньшие части несколькими отрезками, равными и параллельными его сторонам.

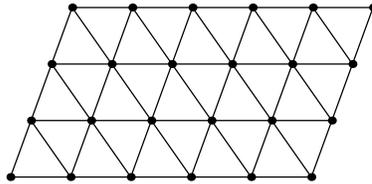


Рис. 8.

Треугольная сетка: клетчатый параллелограмм с равными клетками, в каждом из которых проведено по диагонали так, что все диагонали параллельны.

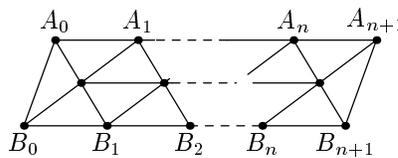


Рис. 9.

Красивый параллелограмм длины n : на двух противоположных сторонах параллелограмма отмечаются по n точек, делящих их на $n + 1$ равных отрезков; i -я точка одной стороны соединяется отрезком с $(i - 1)$ -й и $(i + 1)$ -й точкой

другой стороны, и наоборот; точки пересечения отрезков соединяются напрямую между собой.

Красивый шестиугольник: на треугольной сетке берем звезду Давида, составленную из 12 равных треугольников, затем соединяем соседние вершины звезды прямыми отрезками.

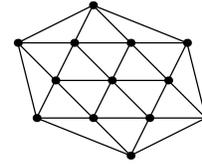


Рис. 10.

Определение. Вершины, соединенные прямолинейным путем, назовем *смежными*. Несмежные вершины в красивой сети назовем, соединенными параллелограммом. (Имеется в виду параллелограмм, ограниченный парой кратчайших путей между этими вершинами.)

Докажем, что этот параллелограмм — единственный.

Лемма 1. Пусть в красивой ДС есть путь ABC , где AB и BC прямолинейные пути. Достроим его до параллелограмма $ABCD$. Тогда все кратчайшие пути из A в C не выходят за границы этого параллелограмма.

Доказательство. Все ясно, если A и C соединены напрямую. Допустим, A и C соединены параллелограммом $AKCL$, где K и B лежат по одну сторону от AC . Если B лежит внутри треугольника AKC , то выпуклый путь ABC короче AKC — противоречие. Если B лежит вне треугольника AKC , а K — вне треугольника ABC , то пути AKC и ABC пересекаются, скажем, AK пересекает BC , скажем, в точке M (см. рис. 11). Но тогда путь AMC короче AKC — противоречие. Остается случай когда K лежит

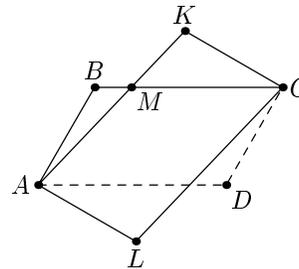


Рис. 11.

внутри или на границе треугольника ABC . Но тогда параллелограмм $AKCL$ целиком лежит в параллелограмме $ABCD$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть две вершины соединены между собой параллелограммом. Тогда из них не выходит ребер внутрь этого параллелограмма.

Доказательство. Пусть A и C соединены параллелограммом $ABCD$; рассмотрим подсеть, им ограниченную. В ней все несмежные вершины соединены параллелограммами.

Допустим, внутри параллелограмма из A выходят ребра. Докажем, что тогда внутри параллелограмма проходит выпуклый путь, который короче пути по сторонам.

Выберем среди ребер выходящих из A ребро AK так, чтобы в углу KAB не было таких ребер. Если K и C смежны, то путь AKC выпуклый (т.к. всякий путь из двух ребер — выпуклый). Если K и C не смежны, соединим их параллелограммом $KLCM$, где L лежит в четырехугольнике $ABCK$ (см. рис. 12). Допустим, путь $AKLC$ не выпуклый. L не смежна A , иначе в углу KAB есть ребро. Соединим L с A параллелограммом $APLQ$, где P лежит в треугольнике ABL . По лемме 1 точка Q лежит в треугольнике ALK , но внутри ALK не выходит ребер из A , значит Q лежит на AK . Аналогично, P лежит на AB . Рассмотрим угол L в четырехугольнике $PLCB$. Если L больше развернутого, то путь $APLC$ выпуклый. Если нет, то угол AKM равен углу L , и путь $AKMC$ выпуклый. Такой путь будет короче пути ABC —

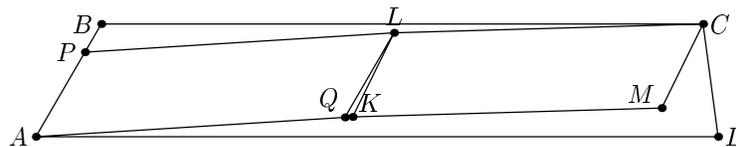


Рис. 12.

противоречие.

Следствие 3. Пусть два ребра выходят из общей вершины A , и в образованном ими углу нет других ребер. Тогда всякая вершина, лежащая внутри этого угла, соединена с A параллелограммом, у которого две стороны идут по этим ребрам.

Доказательство. Обозначим выходящие из A ребра m и n , вершину внутри угла — C . Вершина C не смежна A , иначе внутри угла mAn есть ребро AC . Пусть $ABCD$ — параллелограмм, соединяющий A и C . Тогда ребра m и n не выходят внутрь угла BAD — по лемме 2, а ребра AB и AD не выходят внутрь угла mAn по условию. Значит, углы BAD и mAn совпадают.

Следствие 4. Если вершина C лежит на продолжении ребра AB , то A и C — смежны.

Доказательство. Пусть B лежит между A и C . Предположим противное. Тогда A и C соединены параллелограммом, но ребро AB выходит внутрь этого параллелограмма.

Пусть A лежит между B и C . Тогда, как мы только что доказали, B и C смежны. Но тогда прямой путь из B в C проходит через A .

Замечание. Строго говоря, следующая теорема не нужна для классификации КДС. Все же обойти вниманием аффинную инвариантность КДС было бы неестественно. Теорема содержательна: хотя и прямые и параллелограммы сохраняются при аффинном преобразовании, но расстояния меняются, и кратчайший путь вполне бы мог перестать быть кратчайшим!

Теорема 5 (об аффинности). Аффинное преобразование переводит КДС в КДС.

Доказательство. Достаточно доказать, что при аффинном преобразовании параллелограмм кратчайших путей останется таковым. Назовем кратчайший путь по параллелограмму

плохим, если после преобразования он перестает быть кратчайшим. Предположим противное: КДС Z перешла в Z' , не являющуюся КДС. Выберем среди плохих путей в Z самый короткий. Пусть это путь ABC в соединяющем A и C параллелограмме $ABCD$. Будем обозначать образы вершин и путей теми же буквами, но со штрихом. Поскольку путь ABC — плохой, то в Z' есть путь s' из A' в C' более короткий чем $A'B'C'$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, получим, что s' не выходит за границы параллелограмма $A'B'C'D'$. Тогда прообраз s пути s' не выходит за границы параллелограмма $ABCD$. По лемме 2 путь s может стартовать из A только по ребру параллелограмма $ABCD$, скажем, по AB . Пусть H — ближайшая к A вершина на AB , тогда H лежит на s . Очевидно, что HBC — это кратчайший путь из H в C , и по лемме 1, вершины H и C соединены параллелограммом $HBCD$. С другой стороны, кратчайший путь из H' в C' — по s' , что короче $H'B'C'$. Поскольку HBC проходит по параллелограмму, то это плохой путь, но он короче ABC — противоречие.

Ответ 3.в): Любой красивый параллелограмм длины 1 или длины $n > 3$ и красивый шестиугольник не является подсетями большей КДС.

Указание. Предположим, что красивый параллелограмм длины 1 является чьей-то подсетью. Рассмотрим ближайшую к нему внешнюю вершину, и соединяя ее с другими вершинами с помощью следствий 3 и 4, покажите, что есть еще вершина на красивом параллелограмме либо более близкая к нему вершина.

Ответ также следует из полной классификации красивых двойных сетей.

Определение. *Минимальным параллелограммом (МП)* называется параллелограмм, образованный ребрами КДС, внутри и на сторонах которого нет вершин.

Свойство 6. Во всякой КДС найдется МП.

Доказательство. Выберем среди соединяющих параллелограммов параллелограмм P наименьшей площади. Пусть он соединяет вершины A и C . Допустим, в P есть вершина K , отличная от его вершин. Если K смежна A и C , то путь AKC короче пути из A в C по P . Если нет, то либо с A , либо с C вершина K соединена параллелограммом, который целиком лежит внутри P , и имеет меньшую площадь.

Замечание. Заметим, что если параллелограмм $ABCD$ соединяет A и C , то в нем может присутствовать диагональ BD , то есть B и D могут быть смежны.

Теорема 7. Если в КДС есть МП без диагоналей, то эта КДС — клетчатый параллелограмм.

Доказательство. Пусть $P = OXCY$ — минимальный параллелограмм, и K — вершина вне его. Рассмотрим OX и OY как координатные оси. Обозначим X' и Y' проекции K на эти оси. Докажем, что X' и Y' — вершины, связанные с K напрямую. Рассмотрим случай, когда K лежит во втором квадранте, остальные случаи разбираются аналогично.

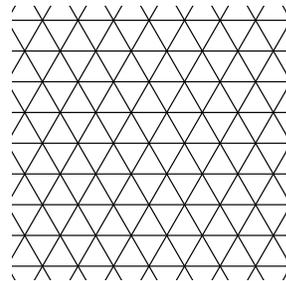
В углу CXO нет ребер, поэтому по лемме 2 вершины K и X соединены параллелограммом $KLXX'$, Y' — пересечение KL и OY , и все доказано.

Пусть, наоборот, X' и Y' — вершины на осях OX и OY соответственно. Построим вершину K с проекциями X' и Y' . Внутри угла YCX нет ребер, поэтому по следствию 1 вершины C и X' соединены параллелограммом $CMX'X$, причем по лемме 2 внутрь угла $MX'X$ не выходит ребер. Аналогично, Y' соединена с X параллелограммом $Y'LXO$. По следствию 1 вершина L соединена с X' параллелограммом $LKX'X$, где K — искомая вершина.

Итак, наша ДС есть клетчатый параллелограмм Q , в котором, возможно, есть еще косые, то есть не параллельные осям, ребра. Покажем, что косых ребер нет. Рассмотрим

левую нижнюю вершину A параллелограмма Q . Применяя следствие 1 к правому верхнему углу C минимального параллелограмма P , видим, что C и A соединены параллелограммом, и что, по лемме 2, внутрь угла A косых ребер не выходит. Пусть теперь B — правая верхняя вершина произвольной клетки. Аналогично, она соединена параллелограммом с A , и из B влево вниз косых ребер не выходит. Точно также, косые ребра не выходят и в других направлениях.

Описание КДС, у которых в минимальном параллелограмме (МП) проведена диагональ.

 Три набора равноотстоящих параллельных прямых на плоскости образуют бесконечную треугольную сетку (см. рис. 13). Эта сетка разбивает плоскость на равные треугольники, которые мы будем называть элементарными (ЭТ). По любому ЭТ сетка однозначно восстанавливается.

Фиксируем в КДС МП с диагональю. ^{Рис. 13} Он разбит этой диагональю на два треугольника; оба задают одну и ту же бесконечную треугольную сетку. Вершины этой сетки назовем узлами, а ЭТ, ограниченный ребрами КДС, — ячейкой.

Заметим, что фиксированный МП состоит из двух ячеек, и что по любой ячейке КДС сетка однозначно восстанавливается.

Скажем, что две ячейки a и b связаны, если найдется последовательность ячеек $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$, такая, что в ней ячейки с соседними номерами граничат по ребру. Назовем два ЭТ вертикальной парой, если у них есть общая вершина и они центрально симметричны относительно нее.

Две прямые, продолжающие противоположные стороны

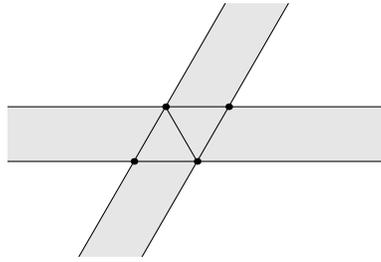


Рис. 14.

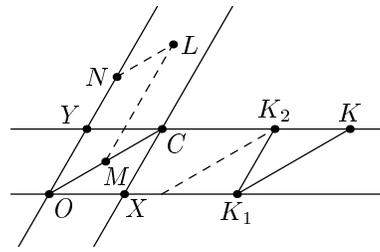


Рис. 15.

параллелограмма, ограничивают полосу; рассмотрим крест, состоящий из объединения двух полос для фиксированного МП (см. рис. 14).

Свойство 8. Все вершины КДС, лежащие в кресте, лежат в узлах на границе креста.

Свойство 9. Каждая вершина в кресте — это вершина ячейки. Любые две ячейки в кресте связаны цепочкой ячеек, лежащих в кресте.

Доказательство свойств 8 и 9. Если вершина лежит внутри или на границе МП, то это — вершина МП, то есть узел.

Если вершина лежит внутри одной из полос, то она лежит внутри одного из углов, образованных стороной и диагональю МП. Пусть, например, вершина L лежит в углу COY (см. рис. 15). По лемме 2 вершина L соединена с O параллелограммом $LMON$, но вершина M оказывается внутри МП — противоречие.

Пусть вершина K лежит на границе креста, например, на прямой YC правее МП (остальные случаи рассматриваются аналогично). Соединив K с O параллелограммом KK_1OC , получим вершину K_1 . Соединив K_1 с Y параллелограммом K_1OYK_2 , получим вершину K_2 и т.д. Какая-то из вершин K_i попадет внутрь МП, значит, K_i — узел.

Рассмотрим последовательность треугольников KK_1K_2 ,

$K_1K_2K_3$, $K_{i-2}K_{i-1}X$, $K_{i-1}XC$, COX . Двигаясь с конца, легко видеть, что все эти треугольники — ячейки. Значит K — узел. Кроме того, поскольку любая ячейка креста связана с ячейками МП, то все ячейки креста связаны между собой.

Свойство 10. Найдется ячейка, примыкающая к МП.

Доказательство. Пусть $OYCX$ — фиксированный МП с диагональю OC . Покажем, что в кресте найдется еще вершина кроме вершин МП.

Если кроме вершин МП других вершин нет, то вершина O — вырожденная. Если есть вершины только на прямой OC , то, по следствию 4, все они смежны O , и снова O — вырождена.

Плоскость вне креста разбивается на четыре угла с вершинами O , X , C и Y . Пусть есть вершина K в одном из этих углов вне прямой OC . Вершина МП, противоположная вершине угла, по лемме 2 соединена с K параллелограммом, и по крайней мере одна из вершин этого параллелограмма лежит на границе креста. Если эта вершина не совпадает с вершинами МП, то мы ее и искали. Если совпадает, то такое возможно лишь когда другая вершина соединяющего параллелограмма лежит на OC . Пусть например, K лежит в углу OCY и соединена с C параллелограммом $KLCY$ (см. рис. 16). Тогда по лемме 2 вершина O соединена с K параллелограммом $ORKL$, и R — искомая вершина.

Итак, в кресте есть дополнительная вершина. По свойству 9 есть цепочка ячеек в кресте, связывающая ее с ячейками МП, а в этой цепочке есть искомая ячейка.

Свойство 11. Все вершины КДС — узлы.

Свойство 12. Каждая вершина КДС — вершина ячейки. Любые две ячейки связаны.

Доказательство свойств 11 и 12. Рассмотрим МП и примыкающую к

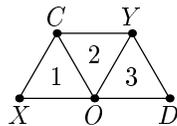


Рис. 18.

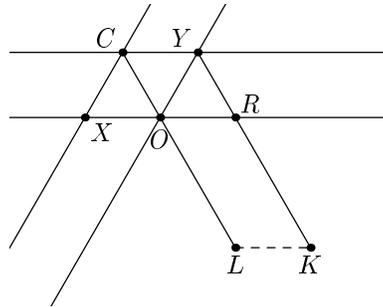


Рис. 16.

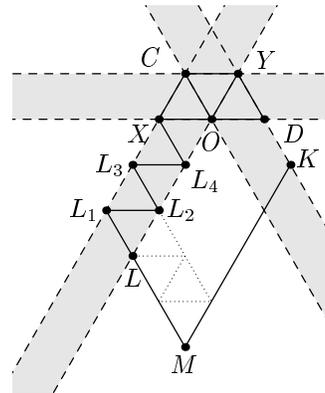


Рис. 17.

нему ячейку. Переобозначим, если необходимо, вершины как на рис. 18. Заметим, что параллелограмм, составленный из второй и третьей ячеек, также минимальный и дает ту же треугольную сетку.

Закрасим кресты, соответствующие обоим МП, как показано на рис. 17. Для всех закрашенных вершин и ячеек свойства 11 и 12 выполняются.

Пусть M — какая-нибудь незакрашенная вершина, скажем, лежащая в углу, вертикальном к COY . M соединена с Y параллелограммом $MKYL$. Но L — вершина закрашенная, поэтому есть закрашенная ячейка LL_1L_2 , связанная с COX (см. рис. 17). Но тогда есть МП $LL_1L_2L_3$. Он состоит из двух ячеек, поэтому задает ту же самую треугольную сетку. Рассмотрим крест, связанный с этим МП. В этом кресте лежат как M , так и три исходные ячейки. Применяя свойства 8 и 9, получаем, что M — узел и вершина ячейки, связанной с исходными ячейками.

Следствие 13. Всякая ячейка — это половина некоторого

МП.

Свойство 14. Если две вершины связаны параллелограммом, то стороны этого параллелограмма идут по линиям треугольной сетки, и параллелограмм разбит на ячейки.

Доказательство. Можно считать, что одна из вершин — это O, X, C, Y или D , а другая — M (см. рис. 17). Вершина M соединена с вершинами C и Y параллелограммом, идущим по сторонам сетки. Вершины X, O и D лежат в углу KML_1 , поэтому каждая из них соединена с M параллелограммом со сторонами, параллельными сторонам этого угла, то есть тоже по сетке. Последовательно соединяя каждую вершину цепочки треугольников, связывающих M с МП, разобьем параллелограмм $MLYK$ на ячейки.

Определения. Ребро назовем *особым*, если оно не идет по линиям сетки. Вершину назовем *одинокой*, если она является вершиной только одной ячейки.

Теорема 15. Если в КДС нет особых ребер, то она — подсеть треугольной сетки.

Доказательство. Рассмотрим объединение всех ячеек. Покажем, что в этой фигуре нет дыр. Предположим, дыра есть. Пусть сторона AB ячейки ABC примыкает к дыре (см. рис. 19). Тогда внутри угла ABC найдется вершина K КДС. Она соединена с C параллелограммом $KLCM$. Однако по свойству 14 этот параллелограмм разбит на ячейки, в частности DAB — МП, то есть AB не примыкает к дыре — противоречие.

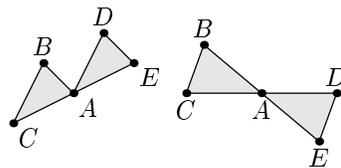


Рис. 20.

Покажем, что фигура является многоугольником. Это мо-

жет быть не так только если есть соединение ячеек уголком, то есть присутствует вершина такая вершина A , из которой выходят четыре внешних ребра фигуры как показано на рис. 20. Но между ячейками ABC и ADE есть цепочка примыкающих. Тогда путь из ABC в ADE через вершину A и возвращение по цепочке примыкающих ячеек охватывает дыру. Противоречие.

Осталось показать, что всякое ребро входит в фигуру. Допустим противное, то есть ребро КДС AB не входит в фигуру, то есть не ограничивает ячейку. Но вершины A и B — это вершины ячеек, тогда путь из A в B по ребру и возвращение по цепочке ячеек охватывает дыру, к которой примыкает ячейка, и повторяя доказательство из первого абзаца, снова получаем противоречие.

Итак, внешние ребра КДС ограничивают многоугольник, разбитый на ячейки, то есть это — подсеть треугольной сетки.

Теорема 15 доказана.

Осталось описать ДС, у которых есть особые ребра.

Свойство 16. Концы особого ребра — одинокие вершины.

Доказательство. Пусть AM — особое ребро, но вершина A не одинока. Тогда есть ребро AB , по которому граничат две ячейки (см. рис. 21) (иначе в A ячейки соединены уголком).

Точка M лежит в области, дополнительной к углу CAD . Прямые AB , AC и AD разбивают эту область на четыре угла. Если M лежит на одной из этих прямых, то AM идет по линиям треугольной сетки, то есть не особое. Если M лежит в углу 2 (см. рис. 21), то M соединена с B параллелограммом $MLBK$, и ребро MA выходит внутрь этого параллелограмма — противоречие. Если M лежит в углу 1, то ребро MA выходит внутрь параллелограмма, соединяющего M с C — снова

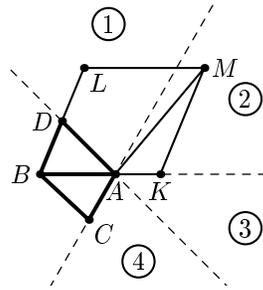


Рис. 21.

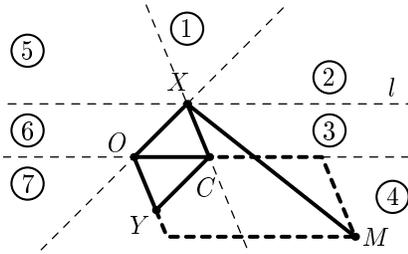


Рис. 22.

противоречие. Аналогично сводятся к противоречию предположения, что M лежит в углу 3 или 4. Итак, особое ребро не может выходить из одинокой вершины.

Свойство 17. Пусть XM — особое ребро. Рассмотрим единственную ячейку с вершиной X . Тогда M лежит на продолжении стороны ячейки, противоположной X .

Доказательство. Пусть XOC — ячейка, YOC — ячейка, примыкающая к ней. Проведем прямую l через X параллельно OC . Вершина M лежит в области, дополнительной к углу OXC . Прямые OX , CX и OC разбивают эту область на 7 частей (см. рис. 22). Будем считать, что границы не входят в эти части.

Если M лежит в углу 1, то ребро MX выходит внутрь параллелограмма, соединяющего M с Y .

Если M лежит в части 2 или 4, то ребро MX выходит внутрь параллелограмма, соединяющего M с O .

В части 3 вообще нет узлов сетки.

Случаи, когда M лежит в частях 5, 6 или 7, сводятся к противоречию аналогично случаям 2, 3 и 4.

Если M лежит на прямой, проходящей через X , то ребро XM идет по линиям треугольной сетки и, следовательно, не особое.

особых ребер. Если выходит ровно два особых ребра, возникает конструкция из трех ячеек как на рис. 24.

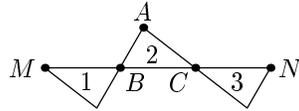


Рис. 24.

Если есть оба этих ребра, то по свойству 18 есть и ячейки 1 и 3, центрально симметричные ячейке 2 относительно вершин B и C соответственно.

Свойство 21. Особое ребро всегда внешнее.

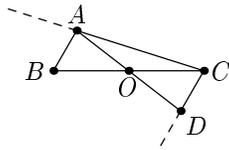


Рис. 25.

Доказательство. Пусть A — одинокая вершина ячейки ABC , M и N — ближайшие к B и C узлы на прямой BC . Тогда только AM и AN могут быть выходящими из A особыми ребрами. Если

есть оба этих ребра, то по свойству 18 есть и ячейки 1 и 3, центрально симметричные ячейке 2 относительно вершин B и C соответственно.

Доказательство. Пусть особое ребро AC соединяет одинокие вершины вертикальной пары ячеек OAB и OCD . Обозначим p полуплоскость с границей AC , где не лежит O . Предположим, что в p есть вершина КДС M , и придем к противоречию. Разобьем p продолжениями сторон пары ячеек на 5 частей (см. рис. 25).

Если M лежит на границе частей, то M соединена с A (или C) напрямую, и тогда A (или C) не одинока. Если M лежит в части 1, то M соединена с O параллелограммом $MKOL$, из C выходит ребро в направлении K , поэтому C не одинока. Если M лежит в части 2, соединим M с B параллелограммом, и C не одинока. Если M лежит в части 3, соединим параллелограммом M с D , и C не одинока. Случаи частей 4 и 5 сводятся к противоречию аналогично 2 и 1.

Свойство 22. Пусть особое ребро AC соединяет вершины вертикальной пары ячеек OAB и OCD (см. рис. 25). Если из C не выходит других особых ребер, то КДС целиком лежит в

углу ACD .

Доказательство. Обозначим p ограниченную прямой CD полуплоскость, в которой не лежит вершина O . Предположим, что в дополнении к углу ACD есть вершина N КДС. Тогда по свойству 15 N может лежать только в углу DCR . Как бы она не была соединена с C — напрямую или параллелограммом, в полуплоскости p есть вершина, соединенная с C напрямую. Но тогда из C выходит еще одно длинное ребро либо C не одинока. Противоречие.

Свойство 23. В графе, составленном из особых ребер, могут быть только такие компоненты связности: P_n (цепочка из n ребер) при $n = 1, 2, 3, 4$ и C_6 — цикл из 6 ребер.

Доказательство. Если в графе из каждой вершины выходит не более двух ребер, любой его связный подграф есть P_n или C_n . Если строить P_n вместе с соответствующими ячейками на треугольной сетке, при $n = 6$ цепочка замкнется. Осталось показать, что при $n = 5$ найдется еще одно особое ребро, замыкающее цепочку в цикл. Действительно, рассмотрим цепочку особых ребер $ABCDEF$ и ячейки 1, 2, 3, 4, 5, 6 (см. рис. 26). Если бы из A не выходит других особых ребер, то, по свойству 22 вся КДС лежала бы в углу BAE , однако вершина F туда не попадает. Значит, есть еще особое ребро AF , которое замыкает цепочку.

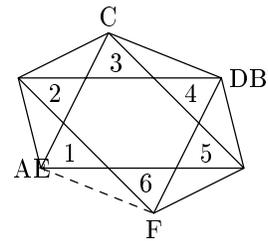


Рис. 26.

Теорема 24. Если в графе особых ребер КДС есть компонента связности P_1 , то эта КДС — подсеть красивого параллелограмма.

Доказательство. Пусть P_1 — это ребро A_1B_1 , а $C_1B_1B_2$ и $C_1A_1A_2$ — соответствующая вертикальная пара ячеек (см. рис. 27). Согласно свойству 22 КДС целиком лежит в полу-

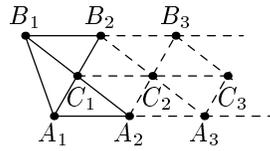


Рис. 27.

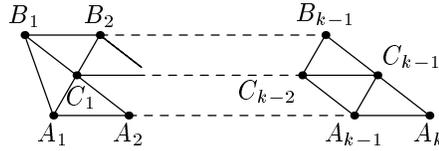


Рис. 28.

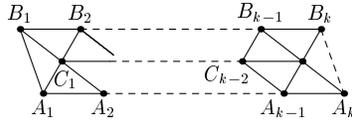


Рис. 29.

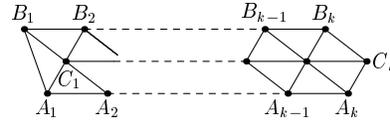


Рис. 30.

полосе, ограниченной лучами A_1A_2 , B_1B_2 и отрезком A_1B_1 . Обозначим попавшие в полуполосу узлы по порядку A_i , B_i и C_i как на рис. 27. Пусть на луче A_1A_2 лежит a вершин КДС, на луче B_1B_2 — b вершин, и на луче C_1C_2 — c вершин, и пусть для определенности $a \geq b$. A_a соединена с B_1 параллелограммом $C_cB_{a-1}B_1A_2$, поэтому $b \geq a - 1$. Кроме того, на A_aB_{a-1} лежит C_{a-1} , значит, $c \geq a - 1$. Вершина C_c соединена с A_1 параллелограммом $C_cC_1A_1A_c$, поэтому $a \geq c$, аналогично $b \geq c$.

Пусть $a = k \geq 2$. Тогда $k - 1 \leq c \leq b \leq k$. Всего возможны три случая:

- 1) $b = k - 1$, $c = k - 1$ (см. рис. 28). Это уже КДС, и из одинокой вершины A_k особое ребро проводить некуда.
- 2) $b = k$, $c = k - 1$ (см. рис. 29). Вершины A_k и B_k могут быть соединены только напрямую, тогда получается красивый параллелограмм длины $k - 1$ (при $k > 2$).
- 3) $b = k$, $c = k$ (см. рис. 30) Это — красивая КДС (при $k > 2$), одиноких вершин — кроме A_1 и B_1 — в ней нет.

Во всех трех случаях получались подсети красивых параллелограммов.

Теорема 25. Если в графе особых ребер КДС есть компонента связности, в которой не менее двух ребер, то эта КДС — подсеть красивого шестиугольника.

Доказательство. Пусть есть компонента связности P_2 , составленная из особых ребер AB и BC . Тогда, согласно свойству 20, есть конструкция из этих ребер и ячеек 1, 2 и 3 (см. рис. 31). По свойству 22 КДС целиком лежит в пересечении углов FAB и BCG , то есть в четырехугольнике $ABCL$.

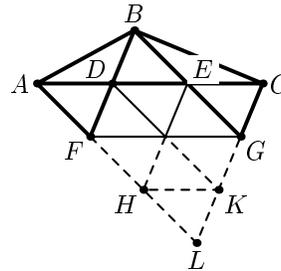


Рис. 31.

Если узлы H, K, L — не вершины КДС, то КДС очевидно совпадает с $ABCGF$. Если H или K — вершины, а L — нет, то, соединяя H с C , а K — с A , видим, что КДС совпадает с $ABCKH$. Наконец, если L — вершина, то КДС совпадает с $ABCL$. Во всех случаях получаем подсеть $ABCL$, которая, в свою очередь, является подсетью красивого шестиугольника.

Аналогично, если в графе особых ребер есть компонента связности P_3, P_4 или C_6 , то КДС аффинно эквивалентна ДС на рис. 32, 33 или красивому шестиугольнику соответственно.

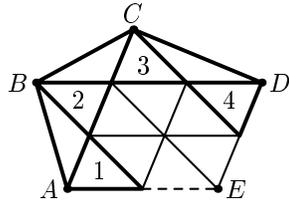


Рис. 32.

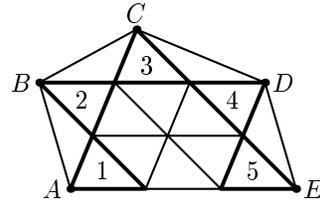
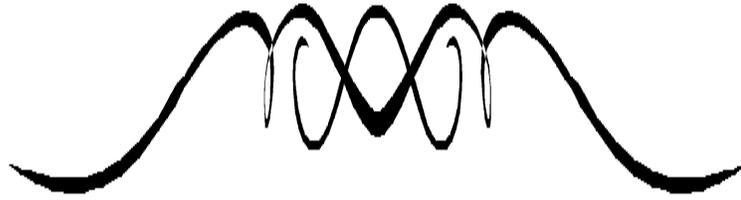


Рис. 33.



Автографы участников конференции