

Занятие 18. Раскраска и чередование

Правильная раскраска выявляет узкие места

1. Какое наибольшее число доминошек 1×2 можно расположить на доске 7×7 без клеток $a_1, c_1, e_1, g_1, g_3, g_5, g_7, e_7, c_7, a_7, a_5, a_3$?
2. Игра «Морской бой». Где-то на поле 10×10 находится корабль 1×3 . За какое наименьшее число выстрелов можно в него наверняка попасть?
3. В каждой клетке доски 5×5 сидело по жуку. По команде каждый из жуков переполз в соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что осталась по крайней мере одна пустая клетка.
4. Замок в форме правильного треугольника со сторонами 100 футов разбит прямыми стенками, параллельными сторонам, на треугольные комнаты со сторонами 10 футов.
а) Сколько всего комнат? б) Во всех стенках между комнатами есть двери. Какое наибольшее число комнат можно обойти, если нельзя выходить наружу и заходить в комнату второй раз?

Если на каждом шагу То чередуется с Этим, то количество Того и Этого отличается не более, чем на 1.

5. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что пар соседей, где справа от девочки сидит мальчик столько же, сколько и пар, где справа от мальчика сидит девочка. (Пары могут пересекаться).
6. Может ли конь обойти все поля доски 9×9 по разу и вернуться последним ходом на исходное поле?
7. По числовой оси кузнечик может прыгать за ход вправо и влево на 7 или 13 ходов. Он стартует с числа 1. Может ли он ровно через 2000 ходов оказаться на числе 2000?

Комбинации тоже могут чередоваться.

8. На столе лежат две кучки конфет: 5 в правой, 4 – в левой. Каждым ходом разрешается убрать или добавить конфету в любую одну из кучек. Нельзя, однако, брать последнюю конфету из кучки, класть в нее более 9 конфет и повторять позиции (хотя позиция «3 в левой, 5 в правой» не та же, что «3 в правой, 5 в левой»). Какое наибольшее число ходов можно сделать?
9. а) За ход разрешается менять местами две рядом стоящие буквы. Какие слова могут получиться ровно за 20 ходов из слова POT?
б) На прямой сидят три кузнечика. Время от времени кто-то из них перепрыгивает через другого (но не через двоих). Могут ли все три кузнечика вернуться на свои места после 17 прыжков?
10. За ход разрешается менять местами две рядом стоящие цифры. Можно ли превратить 12345 в 54321 ровно за а) 8 ходов? б) 12 ходов? в) 13 ходов?

Определения. Назовем *перестановкой* из N элементов расположение чисел $1, 2, \dots, N$ в каком-то порядке. Назовем *беспорядком* пару чисел в перестановке, в которой правое меньше левого. Назовем перестановку *четной*, если общее число беспорядков в ней четно, и *нечетной*, если число беспорядков нечетно.

11. Докажите, что четность перестановки изменится, если а) поменять местами два соседних числа; б) поменять местами два любых числа.
12. Разрешается “перепрыгивать” цифрой ровно через две соседних. Докажите, что такими операциями можно из любой перестановки получить ровно половину всех возможных.

Разнойой

13. Шахматный король обошёл всю доску 8×8 , побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.
14. Докажите, что в кубике Рубика нельзя поменять местами два кубика, оставив все остальные на месте.
15. За одну операцию разрешено число умножить или разделить на простое число. Можно ли а) ровно за 100 операций получить из числа 1 число 100? б) ровно за 200 операций получить из числа 1 число 200?
16. В кооперативе из 11 человек имеется партиячейка. На каждом собрании ячейки происходит либо приём одного члена в партию, либо исключение из партии одного человека. В партиячейке не может быть меньше трёх человек. Возвращаться к какому-либо из прежних составов партиячейки запрещено уставом. Может ли к какому-то моменту оказаться, что все варианты состава ячейки реализованы?
17. * При игре в 15 в клетках квадрата 4×4 располагаются фишки с номерами от 1 до 15, а одна клетка остается пустой. За один ход разрешается передвинуть на пустую клетку фишку из соседней (по стороне клетке). Докажите, что такими ходами нельзя поменять местами две соседние фишки, вернув все остальные на свои места.

Стокгольм, 19 февраля 2005 г , Кругок при школе Сони Ковалевской www.ashap.info/Uroki/sonja/200405/Kruzhok2004-05.html