

Занятие 17. Инвариант

За развитием событий легче следить, если знаешь, что именно не меняется

1. Можно ли доску 8×8 разрезать по границам клеток на части и сложить из этих частей клетчатый прямоугольник 5×13 ?
2. а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа a и b и записать число $a+b$. В конце осталось одно число. Какое?
б) Тот же вопрос, если вместо a и b можно записать ab .
3. На столе стоит 7 стаканов дном вверх. Петя берет два стакана наугад и переворачивает их. Может ли он добиться, чтобы все стаканы стали дном вниз?
4. Есть набор двухклеточных домино, где одна клетка белая, другая – черная. Можно ли из них сложить шахматную доску
а) без одной угловой клетки?
б) без двух клеток в противоположных углах?

Определение: инвариант – это что-то (число, свойство), что не изменяется при разрешенных действиях (например, при разрезании не меняется сумма площадей частей фигуры). Типичные инварианты: четность, остаток по какому-то модулю, произведение или сумма всех чисел или остатков и т.п. Если разрешенные преобразования инвариант сохраняют, то нельзя достичь с другим значением инварианта (например, нельзя доехать на поезде от Стокгольма до Нью-Йорка, поскольку поезд не меняет континент).

5. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 2005 шиллингов?
6. Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?
7. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять одну монету на 100 монет?

Если хочется применить инвариант, а процесса нет, его можно организовать, например сложить целое из частей (как в задачах 4, 5, 7), или сделать подходящую раскраску.

8. Можно ли в прямоугольную таблицу поставить числа так, чтобы в каждом столбце сумма была положительна, а в каждой строке – отрицательна?
9. Есть набор двухклеточных домино. Можно ли из них сложить клетчатую доску 8×8 без двух клеток в противоположных углах?
10. Дети гуляют парами с пряниками в карманах. В каждой паре у одного пряников вдвое больше, чем у другого. Может ли они у всех вместе быть ровно 1000 пряников?
11. Можно ли клетчатую доску 10×10 разрезать на прямоугольники 1×4 ?

Разнойой

12. На листке написаны числа $1, 2, \dots, 25$. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них их разность. Можно ли добиться, чтобы на листке остались только нули?
13. На шахматной доске разрешается за один ход перекрашивать в другой цвет все клетки в одной строке или в одном столбце. Может ли после нескольких ходов остаться ровно одна белая клетка?
14. 6 детей из 6-го класса стоят по кругу, и на каждом из них сидит комар. Время от времени какие-то 2 комара перелетают на соседнего ребенка – один по часовой стрелке, а другой – против. Могут ли все комары собраться на одном несчастном?
15. * На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече 2 хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?