Занятие 15. Принцип крайнего

Идея 1. Нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший) объект.

1. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что найдется ладья , которая бьет не более двух других.
2. На листке написаны несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число, которое на каждое из них делится. Докажите, что на листке найдется число, которое делится на все числа.
3. В порядке возрастания весов лежат несколько камней. Есть чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний можно проверить, правда ли что любая пара камней тяжелле любого одного камня?

Идея 2. Узкое место. Крайними свойствами может обладать и объект, с виду расположенный в середине.

4. a) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?
   b) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?
5. Легко распилить кубик 3×3×3 на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если части разрешается перекладывать и пилить по несколько частей сразу?

Идея 3. Критический момент часто случается в конце процесса.

6. Маляр-хамелеон ходит на одну клетку как обычная ладья. Придя на клетку, он либо принимает ее цвет, либо перекрашивает ее в свой цвет. Белый маляр ставится на черную доску. **a)** Может ли он перекрасить ее в шахматном порядке? **b*** А в любом другом?

Идея 4. Цепочку рассуждений выгодно начать с края, с узкого места.

7. В 100-угольнике длина каждой стороны равна полусумме длин соседних сторон. Докажите, что длины всех сторон равны.
8. Квадрат 100×100 сложен из домино 1×2. Докажите, что некоторые две доминошки образуют квадрат 2×2.
9. На доске были написаны 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел : 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

Разнобой

10. В клетки шахматной доски вписаны 64 различных целых числа. Докажите, что найдутся две клетки с общей стороной, разность чисел в которых не меньше 5.
11. На шахматной доске 100×100 стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одного цвета друг друга не били.
12. Каждый из учеников класса в течение дня один раз посидел в компьютерном классе. Известно, что там каждый встретился с каждым. Докажите, что в некоторый момент все ученики были в компьютерном классе.
13. На шахматную доску по одной выставляются ладьи. Первая ставится куда угодно, каждая следующая – на пустую клетку, при этом она должна побить нечетное число уже ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей может быть выставлено?
14. По кругу записаны 30 чисел, каждое равное модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке (то есть разности с отброшенным знаком). Сумма всех чисел равна 300. Что это за числа и в каком порядке записаны?
15. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтоб все 100 читателей его услышали.