

Занятие 14. Полуинвариант

- а) На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать?
 - б) Королю разрешили еще ходить вправо-вниз по-диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.
- а) В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.
 - б) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.
- В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами.

 - а) Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2, \dots, 100$.
 - б) Какое наибольшее число ходов могут продолжаться перестановки?
- а) Докажите, что если отрезки AB и CD пересекаются, то $AC+BD < AB+CD$.
 - б) Из всех замкнутых ломаных с вершинами в данных точках выбрали самую короткую. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.
- На Ахипелаге Сыщик гоняется за Шпионом. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

Улучшение за несколько ходов

- К строке чисел можно приписать справа число больше или меньше предыдущего на простое число. Вначале в строке только 1. Докажите, что можно продолжить строку так, чтоб в ней (среди прочих) нашлись все числа **a)** от 1 до до 10; **b)** от 1 до 100.
- Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, которая как-то покрашена в черный и белый цвета. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.
- а) В слове разрешается выбрать группу из 3х или 4х букв подряд и переставить буквы этой группы в обратном порядке. Как из АПЕЛЬСИН сделать СПАНИЕЛЬ?
 - б) В строке стоит 100 различных чисел. Разрешается выбрать группу из 3х или 4х чисел подряд и переставить их в обратном порядке. Докажите, что все числа можно расставить в порядке возрастания.

Для самостоятельного решения

- Какое наибольшее число ходов он может сделать король в задаче 1б?
- На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.
- Докажите, что в задаче 6 можно продолжить строку так, чтоб в ней числа не повторялись и (среди прочих) нашлись все числа от 1 до 100.
- В Украине все города подняли над ратушами флаги – голубые либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.