

Занятие 13. Алгоритмы

1. Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Однако солдаты переправились через реку. Как?
2. По целым точкам числовой оси прыгает кузнечик. Он может прыгать на 3 вперед или на 2 назад. Как ему пропрыгать по числам от 1 до 1000 ровно по одному разу?
3. Число 1999! заменили на его сумму цифр. Полученное число снова заменили на его сумму цифр, и т.д.
 - а) Докажите, что рано или поздно получится однозначное число.
 - б) Найдите это число.
4. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ладьи по следующему правилу: каждым ходом на доску устанавливается ладья, и, если она кого-нибудь побила, то одна из побитых ею ладей снимается с доски. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске?
5. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$.
 - а) Разрешается менять местами любые два рядом стоящие. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
 - б) Разрешается менять местами любые два числа, отличающиеся на 1 (например, 7 и 8), где бы они не стояли. Докажите, что можно расставить числа по возрастанию.
 - с) Каким наименьшим количеством перестановок можно гарантированно обойтись в том и другом случае?
6. а) В стране Оз из каждого города выходит по 2 маршрута в другие города страны. Путешественник выехал из столицы, и намерен продолжать путешествие до тех пор, пока ему не придется повторить маршрут. Докажите, что он закончит путешествие в столице.
б) То же, но из каждого города выходит 10 маршрутов.
7. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

Для самостоятельного решения

8. Если на доске записано число A , к нему можно прибавить любой его собственный делитель (отличный от 1 и самого A). Доказать, что из $A=4$ можно получить любое составное число.
9. В прямоугольнике 3×100 расставлены фишки трех цветов по 100 штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.
10. На некоторых клетках шахматной доски 100×100 стоят ладьи. Докажите, что их можно раскрасить в три цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били.

Стокгольм, 15 января 2005 г., Кружок при школе Сони Ковалевской www.ashap.info/Uroki/sonja/200405/Krzhok2004-05.html