

## Посредники в неравенствах

0. Докажите, что  $101^3 > 999^2$ .

Чтобы доказать неравенство  $U > V$ , можно подобрать лежащего между ними *посредника*, с которым каждую из величин удобно *сравнивать*: скажем, такое  $W$ , что  $U > W > V$  или  $U = W > V$ .

1. Какая из дробей больше:  $33/64$  или  $19/39$  ?

2. В горку на велосипеде Петя едет вдвое медленнее, а под горку – вдвое быстрее, чем по ровной дороге. Что он сделает быстрее – спустится с горки и поднимется обратно, либо проедет такой же по длине путь по ровной дороге?

3. а) Каких 5-значных чисел больше: составленных только из чётных или только из нечётных цифр?

б) А если среди таких считают только числа, где цифры идут строго по возрастанию?

4. В клетках таблицы  $10 \times 10$  стоят 100 различных чисел. Макс выбрал в каждой строке максимальное число, и из этих 10 чисел выбрал наименьшее. Минька выбрал в каждом столбце наименьшее число, и из этих 10 чисел выбрал наибольшее. У кого из них число больше?

5. Найдутся ли натуральные  $a$  и  $b$  такие, что  $\text{НОК}(a, b) = a + b$ ?

Посредники могут образовывать цепочку:  $A < P_1 < P_2 < \dots < P_n < B$ . Часто такую цепочку можно получить, изменяя  $A$  шаг за шагом, пока не получится  $B$ .

6. Докажите, что любое многозначное число больше произведения своих цифр.

7. Есть 100 пар дедов Морозов со Снегурочками, каждый выше своей Снегурочки не меньше чем на голову. Головы у всех дедов одинаковой высоты. Докажите, что если распределить Снегурочек по росту (самому высокому – самую высокую, и т.д.), то все равно каждый дед Мороз окажется выше доставшейся ему Снегурочки не меньше чем на голову.

## Ещё задачи

**По1.** На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр в каждом из чисел, неизвестно). На доске осталось:

$$11\dots 73 \times 12\dots 65 = 123\dots 45.$$

Могло ли исходное равенство быть верным?

**По2. а)** Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы  $5 \times 5$ , заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей больше суммы чисел, выбранных Юрой?

**б)** Может ли сумма чисел, выбранных Яшей быть равна сумме чисел, выбранных Юрой?