

Комбинаторика остатков

Если остатков достаточно много, среди них обязательно найдутся одинаковые

Упр: Докажите, что из любых 100 чисел можно выбрать два, разность которых будет делиться на 99.

1. У Гоши есть неограниченное количество карточек, на каждой из которых написана цифра 9. Докажите, что он может составить число, которое делится **а)** на 7 **б)** на 17.
2. Маше повезло больше, и у нее неограниченный запас карточек, на которых написано 2016. Докажите, что она может составить число, делящееся на 2017.
3. Гоша загадал нечетное натуральное число a . Маша начинает выписывать на доску числа $2^1 - 1, 2^2 - 1, 2^3 - 1, \dots$. Докажите, что рано или поздно Маша выпишет число, которое делится на a .

Оказывается, квадраты чисел дают меньше остатков, чем сами числа

4. Петя загадал натуральное число x и посчитал остаток числа x^2 по модулю 3 и по модулю 4. Оба раза у него получилось 2. Докажите, что Петя совсем не умеет считать.
5. Сколько различных остатков могут давать квадраты чисел по модулям:
а) 3 **б)** 4 **в)** 6 **д)** 7 **е)** 9 **ж)** 10 **з)** 15 **и)** 16;
к) Оцените сверху число остатков квадратов по модулю x .

Мы посчитали разные остатки. А как быть с одинаковыми? Может ли быть у квадратов больше 4-х одинаковых остатков по какому-нибудь модулю?

6. Дано 51 целое число. Докажите, что среди них есть два числа, разность квадратов которых делится на 100.
7. Докажите, что среди любых n целых чисел можно выбрать одно или несколько с суммой кратной n .

Зачетные задачи

КО1. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, ..., 60 в таком порядке, чтобы сумма каждых двух чисел, между которыми находится одно число, делилась на 2, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся два числа, делилась на 3, сумма каждых двух чисел, между которыми находятся шесть чисел, делилась на 7?

КО2. Докажите, что каково бы ни было целое число n , среди чисел $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ есть хотя бы одно число, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел.

КО3. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 равен 1 или простому числу.