Индуктивное построение: спуск к нужной ступеньке

Индуктивное построение похоже на подъем по лестнице шаг за шагом. А если влезаешь по ветвящемуся дереву? Надежнее строить лесенку сверху вниз. Смотрим на нужный объект и ищем, с каким нижним он связан или из какого нижнего его можно получить добавкой. А от найденного спускаем ещё одну ступеньку вниз, и так пока не упрёмся во что-то твёрдое.

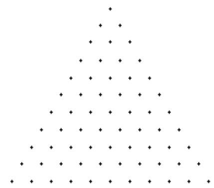
1. а) Все вершины 100-угольника лежат на окружности. Докажите, что его можно разбить непересекающимися диагоналями на пятиугольники и шестиугольники.
б) При каких n вписанный в окружность n-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на пятиугольники и шестиугольники?

К нужной ступеньке часто спускаются, удалив *узкое место.*

2. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить не более чем в 3 цвета так, чтобы ладьи одинакового цвета друг друга не били. (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной вертикали или горизонтали и между ними нет других ладей).

Спуском вниз можно доказать и невозможность. Достаточно показать, что мы непременно спустимся к *невозможной ступеньке*!

3. Докажите, что
а) 66 точек на рисунке нельзя зачеркнуть 10 прямыми
б) любые 65 точек зачеркнуть можно.



4. Клетчатый шестиугольник, которым нельзя накрыть квадратик , назовём *уголком*. Докажите, что квадрат со стороной 10×10 без любой клетки можно разрезать на клетчатые уголки различной нечётной площади.

Для данного объекта может понадобиться выбрать не только объект на предыдущем уровне, но и способ доказательства.

5. На доске выписаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность – неотрицательное число. Докажите, что за 10 таких операций можно получить любое нечетное число от 1 до 1023.

Индуктивный спуск: Зачётные задачи

Сп1. а) Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму различных чисел Фибоначчи;
б) можно сделать эту сумму, не используя соседних чисел Фибоначчи.

Сп2. На кольцевой шнур нанизана связка колец разного размера номерами от 1 до 20 по порядку. Если номера колец отличаются на 2 или больше, их можно поменять местами, продев одно в другое. Кольца с соседними номерами так поменять нельзя. Докажите, что кольца можно расположить в любом порядке, считая по часовой стрелке от 1.

Сп3. В шахматном турнире каждый игрок сыграл с каждым другим одну партию. Докажите, что игроков можно выстроить в очередь так, чтобы ни один не проиграл стоящему сразу за ним.

Сп4. В стране несколько городов, каждые два соединены дорогой. Злой колдун Гибдд заколдовал все дороги, сделав их односторонними так, чтобы из каждого города либо нельзя было уйти, либо, уйдя, нельзя было в него вернуться. Докажите, что городам можно присвоить рейтинг так, чтобы любая дорога вела в город с меньшим рейтингом.

ПК4. На плоскости проведены 10 прямых, никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что можно покрасить любое подмножество их точек пересечения в три цвета так, чтобы на каждой прямой соседние окрашенные точки не были одинакового цвета.

. Сириус, 7А класс, 18 сентября 2017 г, http://www.ashap.info/Uroki/Sirius/1709/index.html