

Телескопические суммы

Слагаемые разных знаков могут компенсировать друг друга или давать более простую разность. То же верно и для сомножителей.

1. Найдите разности сумм:

а) $(1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 99 \cdot 101) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2)$;

б) $(1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \dots + 99 \cdot 101) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2)$.

2. $(1+1/2) \cdot (1+1/3) \cdot (1+1/4) \cdot \dots \cdot (1+1/100)$.

Взаимно уничтожающиеся слагаемые можно получить, заменив каждое слагаемое на разность.

3. Найдите суммы

а) $1/1 \cdot 2 + 1/2 \cdot 3 + 1/3 \cdot 4 + \dots + 1/99 \cdot 100$;

б) $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + 100! \cdot 100$.

Разность может отличаться от члена суммы в несколько раз или содержать дополнительное слагаемое. Но и общий множитель, и лишние слагаемые часто удаётся учесть или сосчитать отдельно.

4. Найдите суммы

а) $1/1 \cdot 4 + 1/4 \cdot 7 + 1/7 \cdot 10 + \dots + 1/97 \cdot 100$;

б) $2^2/1 \cdot 3 + 4^2/3 \cdot 5 + 6^2/5 \cdot 7 + \dots + 100^2/99 \cdot 101$.

Если мы «подозреваем» формулу $F(n)$ для суммы n первых членов, это немедленно дает нам представление n -го члена как разности $F(n)-F(n-1)$. Для подозрений есть основания: сумма линейных выражений (арифметической прогрессии) всегда квадратична, квадратичных – кубична, и т.д. Коэффициенты можно подобрать.

5. Найдите сумму $3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot 99 \cdot 100$.

6. Докажите, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+0,5)(n+1)/3$.

Зачётные задачи

РС1. Найдите произведение $(1-1/4) \cdot (1-1/9) \cdot (1-1/16) \cdot \dots \cdot (1-1/10000)$.

РС2. На тараканьих бегах 20 тараканов выбегают друг за другом с интервалом в одну минуту и бегут с постоянными скоростями. Второй догнал первого через 2 минуты после своего старта, третий догнал второго через 3 минуты после своего старта, и так далее, двадцатый догнал девятнадцатого через 20 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта двадцатый таракан догнал первого?

РС4. Найдите сумму $1/1^2 \cdot 3^2 + 2/3^2 \cdot 5^2 + 3/5^2 \cdot 7^2 + \dots + 50/99^2 \cdot 101^2$

РС5. Из треугольных клеток со стороной 1 составлена треугольная доска со стороной 100. Сколькими способами можно закрасить на ней треугольник с равными сторонами, составленный из целых клеток?

РС6. В ряд записаны 100 чисел, первое и последнее равны 1 и 100 соответственно, а каждый из остальных на 1 больше полусуммы своих соседей. Найдите сумму всех чисел.