

Внутренний матбой группы 7А

1. На листке написаны 16 чисел. Для каждой пары чисел её полусумму выписали на доску. Оказалось, что среди чисел на доске как минимум 106 целых. Докажите, что все числа на листке – целые.
2. Есть 25 белых кубиков. Егор и Лев ходят по очереди, начинает Егор. За один ход нужно выбрать одну белую грань любого кубика и покрасить её в красный или синий цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Лев получает от Егора столько персиков, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число персиков может наверняка получить Лев, как бы ни сопротивлялся Егор?
3. Вначале на доске написано одно число $20/17$. За одну операцию на доску можно добавить ещё одно число. Оно должно быть не равно уже выписанным, и быть либо обратным выписанному (то есть по x можно выписать $1/x$), либо сумме двух выписанных, либо разности двух выписанных. Можно ли не более чем за 15 операций выписать на доску число 1?
4. Найдите все пары натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное на 40 больше их суммы.
5. У подножия Стеклоной горы собрались 33 многоножки с 66, 68, 70, 72, ,130 ногами. Гора скользкая, и многоножка может забраться на неё или спуститься с горы только если не менее половины её ног обуты в специальные ботинки. Какое наименьшее число ботинок нужно заранее приготовить, чтобы все многоножки могли влезть на гору? (Ботинки на гору и с горы могут путешествовать только на ногах многоножек).
6. Назовём натуральное число хорошим, если между его цифрами в десятичной записи, не меняя их порядка, можно расставить скобки и знаки четырех арифметических действий так, чтобы в результате получился 0. Сколько всего хороших стозначных чисел?
7. На столе по кругу лежат монеты в 50 копеек, 2 рубля и 10 рублей. У полтинников сосед по часовой стрелке лежит вверх орлом, а против часовой стрелки – вверх решкой, у двухрублевых монет – наоборот, а у 10-рублёвок оба соседа лежат одинаково: оба орлом или оба решкой. Может ли на столе лежать в сумме ровно 2017 рублей?
8. Четырёхугольник разрезали по прямой. Мог ли он развалиться на 4 равные треугольные части?