Вокруг остатки

1. Про 7 натуральных чисел известно, что сумма любых 6 из них делится на 5.
а) Докажите, что все числа дают один и тот же остаток при делении на 5.
б) Докажите, что все числа делятся на 5

2. В ряд записаны 11 натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{11}. Докажите, что среди сумм
а) a_1, $a_1+ a_2$, …, $a_1+a_2+\ldots+a_{11}$ можно выбрать две суммы, оканчивающиеся на одну и ту же цифру.
б) вида $a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n$ есть сумма, оканчиваящаяся на 0 (разрешаетя брать и суммы из одного числа).

Упр: Вспомните, что среди любых n чисел есть два, разность которых делится на n – 1. Почему так происходит?

3. Существует ли число, которое делится на 737 и состоит
а) Из единиц и нулей
б) Из одних единиц?

А если чисел не n, а меньше? Сможем ли мы найти два числа, разность которых делится на n? Давайте смотреть на квадраты.

4. Сколько различных остатков могут давать квадраты чисел по модулю 4? По модулю 9? По модулю 16? По модулю a?

5. Докажите, что среди любых $n+1$ числа есть два разность квадратов которых делится на $2n$ (n - четно).

6. Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них найдется несколько, или быть может одно, сумма которых делится на n.

Жанна Зосимова. Сириус, 7А класс, 14 сентября 2017 г, http://www.ashap.info/Uroki/Sirius/1709/index.html