

Учти лишнее

Как ты так быстро понял, что в стаде 77 овец? – Сосчитал ноги и поделил на 4!

Целое можно сосчитать, представив его как сумму удобных для подсчета частей.

1. На 100 карточках 13 цветов написали по дроби: в числителе 1, а в знаменателе – общее число карточек данного цвета. Найдите сумму всех дробей.

Если не удаётся просто сосчитать сумму, сосчитай её несколько раз и результат подели.

2. а) На каждом ребре куба записали по числу. После этого для каждой вершины посчитали сумму чисел на выходящих из неё рёбрах. Получили результаты 1, 2, 3, ..., 8. Найдите сумму чисел на всех рёбрах.

б) В каждой вершине куба записали по числу. Затем на каждом ребре записали сумму чисел в его концах. На ребрах получились суммы 1, 2, ..., 12. Найдите сумму чисел в вершинах.

Что-то может быть сосчитано лишний раз. Тогда надо вычесть эти лишние разы.

3. а) Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15? Не делятся ни на 3, ни на 5?

б) Чему равна сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

При вычитании лишнее может сократиться само по себе.

4. В Стокгольме 25000 русских и 10000 любителей математики. Кого здесь больше, и на сколько: русских, не любящих математику или нерусских любителей математики?

Сумма геометрической прогрессии

5. Докажите, что

а) $1+2+2^2+2^3+\dots+2^n=2^{n+1}-1$.

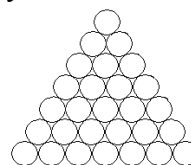
б) $1+5+5^2+5^3+\dots+5^n=(5^{n+1}-1)/4$.

в) если в последовательности n членов, первый равен b , а каждый следующий получается умножением на $q \neq 1$, то сумма всех членов равна $b(q^n-1)/(q-1)$.

Зачётные задачи

УЛ1. В таблицу 4x4 вписаны числа (возможно, нецелые). У каждой клетки сумма всех её соседей по стороне равна 1. Чему равна сумма всех чисел в таблице?

УЛ2. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера в виде треугольника (см. рис). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу 18-ти монет на границе треугольника.



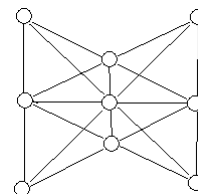
УЛ3. По кругу записаны 100 целых чисел.

а) В каждой тройке подряд идущих сумма кратна 5. Докажите, что и каждое число кратно 5.

б) В каждой тройке подряд идущих сумма кратна 90. Обязательно ли каждое число кратно 90?

УЛ4. Найдите сумму $1+11+111+\dots+11\dots11$ (в последнем числе n единиц).

УЛ5. На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рис.). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается. Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?



УЛ6. а) В клетки доски 8x8 записали числа 1, 2, ..., 64 в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в каждой паре клеток с общей стороной. Всегда ли по ответам можно узнать расположение всех чисел?

б) То же для доски 9x9 с числами от 1 до 81.