

## Пошаговое конструирование

Многэтажные здания строят, ставя по очереди следующий этаж на предыдущий. Начав с двухэтажного коттеджа, можно построить 100-этажный небоскрёб. То же с серийными примерами: их получают последовательно, сравнивая с предыдущими и достраивая по мере необходимости.

**1.** Дан алгоритм: от прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что есть прямоугольник, для которого алгоритм закончит работу ровно после 10-го отрезания, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счет).

Когда предыдущие примеры серии построены, почему бы для следующего шага не использовать не один, а несколько из них, быть может, даже все.

**2. а)** Как построить строку из 10 натуральных чисел, где каждое число при делении на любое из предыдущих даёт в остатке 1?

**б)** Дан список из нескольких простых чисел. Как компьютеру построить ещё 10 разных простых чисел, которых нет в списке?

Построив алгоритм пошагово, подумайте, нельзя ли его упростить.

**3.** 20 сплетников узнали каждый по своей новости. Созвонившись, сплетники сообщают друг другу все известные им новости. Как, сделав всем вместе 36 звонков, сообщить каждому все 20 новостей?

До сих пор мы строили серию примеров для всех меньших значений параметра, начиная с некоторого.

Бывает, однако, что приходится шагать по каким-то специальным значениям, например, по четным числам, по нечетным числам, по степеням.

**4.** Есть 600 газовых баллонов. Разрешается выбрать от 2 до 5 баллонов и на время соединить их вместе: тогда давление в каждом из них станет равно среднему арифметическому их давлений. Как такими операциями добиться, чтобы во всех баллонах давление стало одинаковым?

Серия может распадаться на несколько подсерий. Шаги идут внутри подсерий, часто они однотипны, но начала у серий разные.

**5.** Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого  $n$  от 100 до 2017 он может написать кратное 7 число с суммой цифр  $n$ .

## Зачётные задачи

**ПК1.** Сложите из доминошек  $2 \times 1$  квадрат  $10 \times 10$  так, чтобы ни в какой точке не соприкасались уголками четыре доминошки.

**ПК2. а)** Как найти 12 различных натуральных чисел таких, чтобы каждое при делении на меньшие давало разные остатки?

**б)** Найдутся ли 20 различных натуральных чисел таких, чтобы для каждой пары чисел остаток от деления большего на меньшее отличался от таких же остатков во всех остальных парах?

**ПК3.** Слоник за один ход может прыгнуть на любое число клеток по диагонали, равное точному квадрату (на 1, то есть на соседнюю, на 4, на 9 и т.д.). При этом он может перепрыгивать занятые клетки. Докажите, что на достаточно большой доске можно расставить несколько слоников так, чтобы каждый бил ровно 10 других.

**ПК4.** На плоскости проведены 10 прямых, никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что можно покрасить любое подмножество их точек пересечения в три цвета так, чтобы на каждой прямой соседние окрашенные точки не были одинакового цвета.

**ПК5.** В клетчатом квадрате  $n \times n$  сделали серыми все клетки одной диагонали и все клетки под диагональю. Найдите все  $n$ , при которых полученную серую фигуру можно разрезать на трехклеточные уголки.