Клеим пазл

Организуем процесс и следим за предсказуемой величиной

В занятии про инвариант мы уже видели ветвящиеся процессы, где число состояний и путей росло с каждым шагом. Сегодня мы будем искать величины, которые меняются, но зависят только от номера шага (а от позиции или состояния не зависят). Это поможет нам в написании полезных равенств и неравенств.

1. Пазл Саше понравился, он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе по три куска — начальных, или ранее склеенных. В результате весь пазл склеился в одну цельную картину за 2 часа. За сколько минут склеилась бы картина, если бы Саша склеивал вместе за минуту не по три, а по четыре куска?

Представим сложный объект как пазл, разобьём его на кусочки, а потом запустим процесс сборки. Следя за за числом склеек и кусков, получим нужную оценку.

2. Из спичек сложен треугольник со сторонами в 10 спичек, разбитый на треугольные клетки со сторонами в 1 спичку. В угловую клетку посадили жука. Жук не может переползать через спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог попасть во все клетки?

3. Каков наибольший периметр клетчатого многоугольника из 100 единичных клеток?

Вершины графа можно считать кусочками пазла, а рёбра – склейками. Организовав процесс сборки, докажем полезные неравенства.

4. Докажите, что

а) в связном графе с n вершинами не менее $n - 1$ ребра.

б) В графе с n вершинами и k рёбрами не менее $n - k$ компонент связности.

В сложных случаях процесс может быть не тот, что описан в условии. Скажем, не вписываем, а клеим, и считаем количество склееных сторон.

5. Лев по одному вписывает числа в клетки таблицы 10x10, вначале пустой. Вписаное число равно количеству уже заполненных соседних по стороне клеток. Когда вся таблица заполнена, Лев находит сумму всех чисел. Докажите, что сумма не зависит от порядка заполнения клеток и найдите её.

Зачётные задачи

Пз1. Клетчатую плитку шоколада 5×20 разрешается за один ход разломить по границам клеток на два меньших прямоугольных куска. Следующим ходом разрешается выбрать любой кусок и так же разломить его на два, и т.д. При этом у любого куска длины соседних сторон должны быть взаимно просты. Какое наибольшее число ходов может быть сделано?

Пз2. Какое минимальное число спичек нужно удалить из большого треугольника в задаче 2 так, чтобы из каждой клетки можно было добраться до границы большого треугольника?

Пз3. В ряд слева направо лежат 2017 монет. Петя и Вася играют, начинает Петя. За один ход можно объединить две соседние кучки в одну, если правая не меньше левой. Проигрывает тот, кто не может ходить. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?

Пз4. 64 шахматиста устроили турнир. В нём у каждого игрока ничейных партий было на одну больше, чем результативных. Тот, кто хоть раз проигрывал – выбывал. Последний, кто остался, стал чемпионом. Сколько всего было партий?

Пз5. Из какого наименьшего числа клеток может состоять клетчатый 666-угольник?

Пз6. Дан клетчатый прямоугольник 7×10. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?