Делимость и остатки

Определение: Пусть a – целое число, b – натуральное. Тогда существует такие целые числа q и r, что $a = bq+r$, $0 \le r < b$. Числа q и r определены однозначно для каждых a и b. Число r называется остатком при делении числа a на число b, а число q — неполным частным.

1. а**)** Докажите, что если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c, то их разность делится на c.
б**)** Докажите, что если разность чисел a и b делится на c, то они дают одинаковые остатки при делении на c.

2. Найдите число, которое при делении на сумму своих цифр дает в остатке 22.

Свойство равно-остаточности при делении на **3** и на **9:** Число при делении на 3 и на 9 имеет такой же остаток, что и его сумма цифр.

3. Докажите свойство равно-остаточности а**)** для 3; б**)** для 9.

4. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что **а)** их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.

5. Сумма трех квадратов чисел делится на 3. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 3.

6. Найдите последнюю цифру числа $1^2+2^2+\ldots+999^2$.

Зачетные задачи

ДО**1** а**)** Дано пять чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, у которых разность квадратов делится на 9.
б**)** Сумма трех квадратов чисел делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, у которых разность квадратов делится на 9.

ДО**2** На доске написано число 11^{11}. Андрей зачеркнул первую цифру этого числа и прибавил ее к оставшемуся числу, затем проделал эту операцию снова и т. д., пока не получил десятизначное число. Могут ли быть все цифры этого числа различны?

ДО**3** Докажите, что квадрат натурального числа не может оканчиваться на две нечетные цифры.

ДО**4** Дано 10 натуральных чисел. Из десяти возможных сумм по девять чисел встретились следующими: 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95 (две суммы совпали). Найдите исходные числа.

ДО**5** Даны 111 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 500. Могло ли оказаться так, что для каждого из этих чисел его последняя цифра совпадает с последней цифрой суммы всех оставшихся чисел?