

Инвариант шаг за шагом

Неизменное свойство процесса называют *инвариантом*. Если оно не меняется на каждом шаге, то не меняется вообще. Даже, когда шаги однозначны, но их много, всю цепочку выписывать явно не стоит. Лучше вывести окончательный результат из инварианта.

1. Каждым ходом компьютер увеличивает число на экране. Если сумма цифр числа делится на 4, он увеличивает число на сумму цифр, а если не делится, то увеличивает на 10. Вначале на экране было число 13. Может ли получиться число 444444?

Последовательность тоже можно считать процессом по выписыванию её членов шаг за шагом. Иногда удобнее начать выписывать с конца и шагать справа налево.

2. Каждый член последовательности (кроме крайних), равен среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что эта последовательность – арифметическая прогрессия.

Чаще процесс *ветвится*: на каждом шаге есть выбор. Здесь значение инварианта одинаково для начальной точки процесса и для всех точек, до которых можно дойти указанными шагами. А вот до точек с другим значением инварианта дойти нельзя.

3. В трёх кучках 3, 14 и 15 камней. За одну операцию можно в одну кучку добавить один камень, а в другую – 5 камней. Докажите, что после любого количества операций среди кучек найдутся не равные.

4. Изначально на доске написаны числа 3, 14, 15 и 92. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b , стереть их. А на их месте написать числа $(5a-3b)/2$ и $(5b-3a)/2$. Можно ли такими операциями получить числа 17, 27, 37 и 47?

Инвариантными свойствами обладают не только числа и их остатки. Таким свойством может быть наличие какого-то особенного элемента или группы элементов, какое-то совпадение или неравенство. Часто эта особенность воспроизводится при каждом выполнении операции или при преобразовании особого элемента.

5. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как хромая ладья (то есть, на одну клетку по вертикали или горизонтали). Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на чёрную доску размерами 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?

Зачётные задачи

ИШ1. Волк и семеро козлят встали в один ряд и играют в чехарду: каждую секунду двое из них, стоящие через одного, могут, прыгнув, поменяться местами. Если окажется, что они стоят в обратном порядке по сравнению с исходным, игра заканчивается. Закончится ли игра?

ИШ2. На экране компьютера число 76543210. Каждую секунду робот уменьшает его на его сумму цифр. Он закончит, когда получит однозначное число. На каких числах робот может закончить?

ИШ3. Изначально в 33 клетках шахматной доски сидит по жуку. Каждую секунду жуки переползают в понравившуюся им соседнюю по стороне клетку. Могут ли в некоторый момент все они собраться в одной клетке?

ИШ4. Изначально на доске написан набор чисел 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз (например, 50 и 20 заменить на $50:5=10$ и $20 \cdot 7=140$). Можно ли такими операциями получить набор 30, 40, 50, 60?

ИШ5. По кругу лежат 500 монет: 5 орлом, 5 решкой, 5 орлом, 5 решкой и т. д. Разрешается перевернуть монету, если один из её соседей лежит орлом, а другой — решкой. Какого наибольшего числа монет, одновременно лежащих орлом, можно добиться с помощью таких операций?

ИШ6*. На прямой отмечены две точки – красная и синяя. Разрешается добавлять или стирать

пару красных или пару синих отмеченных точек, если между ними нет других отмеченных точек. Можно ли добиться, чтобы были отмечены те же точки, но красная стала синей, а синяя – красной?

Сириус, 7А класс, 5 сентября 2017 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Sirius/1709/index.html>