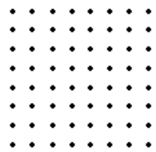
Задачи для разбора перед зачетом

Достаточно много задач оставлялось для самостоятельного решения. Большая часть из них кем-нибудь из школьников была решена. Наиболее принципиальные были намечены к разбору. Времени разобрать всё не хватило, номера разобранных даны курсивом.
Полавляющее большинство задач из списка – авторские.

Числовые закономерности. Арифметическая прогрессия.
10б. Существует ли арифметическая прогрессия из 10 различных дробей с числителем 1?
11. Найдите формулу n-го члена для ряда 1, 11, 111, 1111, ….
12. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Докажите, что если продолжать выписывать новые члены этой прогрессии, то рано или поздно найдутся два члена (не обязательно соседние) с равной суммой цифр.
Точки и прямые (оценка+пример)
9б. Каким наименьшим числом прямых можно зачеркнуть все точки на рисунке, если нельзя использовать вертикальные и горизонтальные прямые?



ПТ2а. На плоскости отмечены 44 точки. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть шестью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть шестью прямыми.
Поиск перебором
7. Дан шестизначный номер: 123556. Не меняя порядка цифр, расставьте знаки действий и скобки так, чтобы в результате получилось 100.
ПП1. Можно ли на клетчатую доску 4×5 поставить ферзя, двух коней и двух ладей так, чтобы каждая фигура побила ровно одну другую и была побита ровно одной другой?
ПП2. Существует ли десятизначное число, у которого первая слева цифра равна числу единиц в записи этого числа, вторая – числу двоек, третья – числу троек, четвертая – числу четверок, …, девятая – числу девяток, десятая – числу нулей?
Группируй и считай
ГС2. Взяли две одинаковые колоды из 36 карт, каждую перетасовали и положили одну колоду на другую. Посчитали число карт, лежащих между каждой парой одинаковых карт: между дамами пик, между тройками червей и т.д. Чему равна сумма всех 36 найденных чисел?
Одинаковые графы
ОГ1. Можно ли из слова КРАБ получить слово БРАК, если разрешается переставлять букву, перепрыгивая ровно через две другие буквы?
ОГ2. Может ли в компании у каждого быть ровно 6 знакомых, и у каждых двоих быть ровно по 2 общих знакомых?
Периметры прямоугольников
7. Можно ли из каких-нибудь 7 равных прямоугольников с периметром 20 составить один прямоугольник с периметром 100?
8. Клетчатый квадрат 17×17 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдется прямоугольник, периметр которого кратен 4.
9. а) Большой прямоугольник разрезали на 4 меньших прямоугольника двумя перпендикулярными разрезами. Известно, что периметры как минимум трех из частей – целые (если измерять в см). Докажите, что и четвертый периметр – целый.
б) Прямоугольник разбили на 121 прямоугольную клетку десятью вертикальными и десятью горизонтальными прямыми. У 111 клеток периметры целые. Докажите, что и у остальных десяти периметры тоже целые.
10. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на 18 прямоугольников. Один из них отложили в сторону, а из остальных составили прямоугольник с периметром 234. Найдите размеры отложенного прямоугольника.
Игра на опережение
5. Есть 9 запечатанных коробок соответственно с 1, 2, 3,..., 9 конфетами (число конфет на коробке написано). Двое играющих по очереди берут по одной конфете из любой коробки. При этом, если игрок хочет или должен взять конфету из запечатанной коробки, он эту коробку распечатывает. Проигрывает тот, кто последним распечатает коробку. Кто из них может выиграть, как бы ни играл соперник?
6. а) В одном из углов клетчатой доски 15×15 лежит плоский картонный квадрат 5×5, а в противоположном – квадрат 1×1. Игроки по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Петя – большой квадрат, а Вася – маленький. Петя выиграет, если Васин квадрат окажется на клетке,

накрытой Петиным квадратом.

б) То же, но размер большого квадрата 3×3.

ИО1. Есть 100 печенек и 100 блюдец. Вася расставляет по кругу любое число блюдец и распределяет на них печеньки – не обязательно поровну, но на каждое – хотя бы по одной. После этого Петя и Вася забирают себе блюдца по очереди, начинает Петя. Первым ходом каждый берет любое блюдце, потом можно брать только блюдце, которое стояло рядом со взятым тобой. Если брать нечего, ход пропускается, другой продолжает ходить. Может ли Вася обеспечить себе не менее 60 печенек?

Уравнение за кадром

8. Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в этом роду имели по трое детей, за исключением семерых, не оставивших потомства. Всего в роду были 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец принадлежал роду).

9. а) В ряд были выписаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 102. Их выписали в другом порядке: сначала все кратные 2 по возрастанию (то есть 2, 4, 6...), затем все из оставшихся кратные 3 по возрастанию, затем — оставшиеся кратные 5, потом – кратные 7 и т.д. На последнее место записали число 1. Докажите, что какое-то из чисел осталось на своем месте.

б) Так же выписаны числа 1, 2, 3, ..., 2014. Докажите, что какое-то из чисел осталось на своем месте.

10. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Жилец из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег в 1,4 раза больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что двузначные номера стоят вдвое, а трёхзначные — втрое больше, чем однозначные. Сколько квартир в подъезде?

Расстояния в графах

8б. Какое наибольшее число вершин может быть в графе диаметра 2, если все степени его вершин равны 3?

РГ2. Клетчатую доску со стороной N превратили в граф коня. Расстояние от угловой клетки до любой другой угловой одно и то же. Найдите N.

По кругу

Кр1. По кругу записаны 77 натуральных чисел. Известно, что если у двух чисел есть общий сосед (то есть, между ними расположено ровно одно число), то одно из них делится на другое. Докажите, что найдутся два числа, у которых нет общего соседа, но при этом одно из них делится на другое.

Посредники в неравенствах

По2. **а)** Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей больше суммы чисел, выбранных Юрой?

б) Может ли сумма чисел, выбранных Яшей быть равна сумме чисел, выбранных Юрой?

Делители

12. Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных натуральных делителей и чётное количество нечётных?

Де1. Все делители натурального числа N, кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (то есть d_1 делится на d_k, d_2 – на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.

Де2. У Арсения и Антона есть по натуральному числу. Каждый из них выписал все делители своего числа. Суммы выписанных чисел у них совпали. Затем они заменили каждый из делителей на обратное число (то есть заменил каждое d на 1/d). Суммы опять совпали. Докажите, что у Арсения и Антона – одно и то же число.

Считаем паззлы

7б. Есть плоский торт в форме выпуклого 10-угольника. На какое наибольшее число многоугольных частей можно его разделить прямыми разрезами так, чтобы все части имели различное число углов?

8. На клетчатой бумаге нарисован 100-угольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток может состоять этот многоугольник?

Правило умножения в комбинаторике

ПУ1. а) У скольких трехзначных чисел разница между самой большой и самой маленькой цифрой равна 1?

б) А равна 2?

ПУ2. а) На числовой прямой отмечены точки с координатами 0, 1, 2, 3, …, 100. Сколько всего есть отрезков нечетной длины с концами в этих точках?

б) На числовой прямой отмечены 25 точек с целыми координатами. Каково наибольшее возможное число отрезков нечетной длины с концами в этих точках?

Частичные уравнения

ЧУ2. По круговому треку соревновались два гонщика, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их седьмая встреча произошла на линии старта. Через сколько секунд после старта произошла эта встреча, если известно, что первый тратил на каждый круг на 30 секунд меньше второго?

Кодировка

Код3. В стране *N* городов, каждые два соединены дорогой. Злой колдун Гибдд хочет заколдовать все дороги, сделав их односторонними так, чтобы из каждого города либо нельзя было уйти, либо, уйдя, нельзя было в него вернуться. Сколькими способами он может это сделать?

Увидеть двудольный граф

9. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10 (см. рис). Полина прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Полина была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Полина на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

УД1. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

Приключения мистера Бина

11. Мистеру Бину в магазине при покупке головки сыра весом 3,5 кг магазин предложил призовую игру. Покупатель режет головку на 3 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель — побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

Соответствие

10. По числовой прямой скачет блоха. Она стартует из точки между 0 и 1. Перед каждым прыжком она смотрит на расстояние до ближайшего целого числа слева от неё, и прыгает вправо на это расстояние. После 17-го прыжка блоха впервые попала на целое число – это оказалось число

а) 16

б) 15.

Из скольких точек блоха могла стартовать?

Цена игры

7. Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достается. Так продолжается, пока кто-то из них не получит девять пригоршней, после чего другой забирает все оставшиеся монеты (дележ может закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит девять пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он может гарантировать себе независимо от действий Глазка? (Укажите это число, покажите, как Хапок может его себе гарантировать, и докажите, что большего он гарантировать не может).

ЦИ2. Есть 20 неокрашенных клетчатых прямоугольников 1х4. Катя и Геля ходят по очереди, начинает Катя. Каждым ходом Катя выбирает цвет – черный или белый, – а Геля красит в этот цвет одну из еще не окрашенных клеток в любом из прямоугольников. Игра заканчивается, когда все прямоугольники полностью покрашены. Катя получает от Гели столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных прямоугольников. Какое наибольшее число рублей она может наверняка получить, как бы ни играла Геля?

Эйлеров путь

ЭП1. Город в плане выглядит как квадрат 3×3, каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

Средние

9. а) Лев и Даня соревнуются в изготовлении и употреблении сладких коктейлей. Лев смешал «пепси» с «фантой», а Даня – лимонад с сиропом. Известно, что лимонад слаще «пепси», а сироп слаще «фанты». Могла ли смесь Льва оказаться слаще Даниной? (Сладость – это доля сахара от общего веса).

б) В группе есть учащиеся из 6-го и 7-го классов. Средний рост шестиклассниц меньше среднего роста семиклассниц. Средний рост мальчиков-шестиклассников меньше среднего роста мальчиков семиклассников. Обязательно ли средний рост всех учащихся 6-го класса меньше среднего роста всех учащихся 7-го класса?

Ослабление условий

6. а) Докажите, что существует палиндром, делящийся на 5^5.
б) Число N – палиндром. Докажите, что есть палиндром, кратный $27N$.
в) Докажите, что есть палиндром, кратный 6^5.
(Напомним, что *палиндром* – это число, которое не меняется при записи его цифр в обратном порядке).

ОУ1. Есть 10 двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два непересекающихся набора с одинаковыми суммами.

Включение-исключение

ВИ1. У скольких пятизначных чисел нет трех одинаковых цифр подряд?
ВИ2. Выписано 10 чисел, не все из них целые. Выбираются всевозможные наборы из одного или нескольких чисел с целой суммой. Каково наибольшее возможное количество таких наборов?