Цена игры

Важный пример *двусторонних* задач: *игры на счёт*. Для конечных игр результат выражается числом (ценой игры). Обычно первый старается сделать это число больше, а второй – меньше. Приходится приводить две стратегии: одна гарантирует первому игроку результат не меньше числа, другая второму – не больше числа. Стратегии часто похожи, но могут быть и совершенно различными.

1. На столе лежат 10 карточек с числами 1, 2, 3, …, 10. Петя и Вася по очереди берут по карточке, пока не разберут все. Начинает Петя. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Петя, как бы ни играл Вася?

Если какая-то из оценок тривиальна, приведение стратегии для её доказательства не требуется.

2. На каждой вертикали шахматной доски стоит по шашке. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок сдвигает любую одну из шашек на одну клетку вниз. Если при этом шашка сходит с доски, игрок забирает ее себе в карман. Какое наибольшее количество шашек может забрать себе в карман Петя, как бы ни играл Вася, если

а) вначале все шашки стоят на верхней горизонтали;

б) вначале все шашки стоят на диагонали из верхнего левого угла в правый нижний?

Определение. Обычно под *результатом* игры на счёт подразумевают сумму, которую должен Второй выплатить Первому (в случае ничьей или выигрыша Второго эта сумма соответственно нулевая или отрицательная). Цена игры – это результат при правильной игре, то есть при наилучших действиях сторон.

3. На столе лежат 100 карточек с последовательными числами. Петя и Вася по очереди берут по карточке, пока не разберут все. Начинает Петя. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Даже и для нетривиальной оценки не нужно приводить стратегию, если она достигается при *любой* стратегии.

4. Петя и Вася по очереди проводят красные и синие прямые на плоскости, так, чтобы они не проходили через точки пересечения других прямых и не были им параллельны. При этом каждый игрок на каждом ходу выбирает, будет проведенная им прямая красной или синей. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда оба проведут по 20 прямых. Вася старается сделать как можно больше точек, где пересекаются прямые разного цвета. Какого наибольшего количества таких точек он может гарантированно добиться, как бы ни играл Петя?

Зная оценку за противника, можно отказаться от планов её превысить, и ограничиться *более простой* стратегией, достигающей того же результата.

5. На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается получить как можно больше сыра по весу. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Когда за одного из противников наилучший результат гарантируется *парной* стратегией, стратегия другого может строиться на стремлении к той же парной стратегии. Впрочем, попытаться использовать стратегию противника при построении своей полезно почти всегда.

6. Игра происходит на клетчатом поле 9×9. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Он ставит в свободные клетки крестики, Вася – нолики. Когда все клетки заполнены, подсчитывается количество строк и столбцов, в которых крестиков больше, чем ноликов, – число K, и количество строк и столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков, – число H (всего строк и столбцов – 18). Какую наибольшую разность K – H может обеспечить Петя, как бы ни играл Вася.

7. Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достается. Так продолжается, пока кто-то из них не получит девять пригоршней, после чего другой забирает все оставшиеся монеты (дележ может закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит девять пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он может гарантировать себе независимо от действий Глазка? (Укажите это число, покажите, как Хапок может его себе гарантировать, и докажите, что большего он гарантировать не может).

Ещё задачи

ЦИ1. Двое делят кусок сыра, каждый хочет получить побольше. Сначала первый режет сыр на два куска, потом второй – любой из кусков на два. Далее первый берет себе один кусок, потом второй – один из оставшихся кусков, потом снова первый – последний кусок. Как распределится сыр при наилучшей игре обоих?

ЦИ2. Есть 20 неокрашенных клетчатых прямоугольников 1x4. Катя и Геля ходят по очереди, начинает Катя. Каждым ходом Катя выбирает цвет – черный или белый, – а Геля красит в этот цвет одну из еще не окрашенных клеток в любом из прямоугольников. Игра заканчивается, когда все прямоугольники полностью покрашены. Катя получает от Гели столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных прямоугольников. Какое наибольшее число рублей она может наверняка получить, как бы ни играла Геля?

ЦИ3. По кругу стоит 101 блюдце, на каждом по конфете. Сначала Малыш выбирает натуральное $m<101$, затем Карлсон – натуральное $k<101$. Малыш берет конфету с любого блюдца. Отсчитав от этого блюдца k-е блюдце по часовой стрелке, берет с него конфету Карлсон. Отсчитав уже от этого блюдца m-е блюдце по часовой стрелке, берет с него конфету Малыш (если она там еще есть). Отсчитав от блюдца Малыша k-е блюдце по часовой стрелке, берет с него конфету Карлсон (если она там еще есть), и т.д. Какое наибольшее число конфет может себе гарантировать Карлсон, как бы ни играл Малыш?