Увидеть двудольный граф

Раскраска в два цвета

1. На некоторых клетках шахматной доски стоят кони. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы кони одинакового цвета друг друга не били.

2. а) Выписаны числа от 1 до 13. Раскрасьте их в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

б) Выписаны 100 произвольных натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

3. На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

Определение. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета. Пример: любое дерево.

При движении по двудольному графу цвета вершин строго чередуются, поэтому вернуться в исходную вершину можно только за чётное число ходов.

4. В задачах 1-3 определите вершины и рёбра двудольных графов.

Позиции и ходы

С игрой всегда связан граф: позиции – вершины, ходы – рёбра. Полезно знать, когда этот граф – двудольный.

5. а) На прямой сидят два кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого. Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 77 прыжков?

б) То же для трёх кузнечиков.

6. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали.

а) На нижней горизонтали шахматной доски стоят две одинаковых фишки. На тех же вертикалях отмечены две клетки верхней горизонтали. Могут ли фишки ровно через 63 хода оказаться в отмеченных клетках (возможно, поменявшись вертикалями)?

б) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. Отмечены 5 клеток, центрально симметричных занятым (возможно, что некоторые отмеченные клетки совпали с занятыми). Могут ли фишки перейти пять отмеченных клеток, сделав в сумме ровно 123 хода?

Чередование и обходы

Теорема 7. Дан двудольный граф с черными и белыми вершинами. Докажите, что

а) На любом замкнутом цикле, где вершины не повторяются, лежит поровну чёрных и белых вершин.

б) На любом пути, где вершины не повторяются, число черных вершин равно числу белых вершин или отличается от него на 1.

8. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

9. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10 (см. рис). Полина прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Полина была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Полина на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Ещё задачи

УД1. Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

УД2. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

УД3. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

Сириус, 7А класс, 14 сентября 2016 г, http://www.ashap.info/Uroki/Sirius/1609/index.html