Посредники в неравенствах

0. Докажите, что $101^3 > 999^2$.

Чтобы доказать неравенство $U > V$, можно подобрать лежащего между ними *посредника*, с которым каждую из величин *удобно сравнивать*: скажем, такое W, что $U > W > V$ или $U = W > V$.

1. Какая из дробей больше: 33/64 или 19/39 ?

2. В горку на велосипеде Петя едет вдвое медленнее, а под горку – вдвое быстрее, чем по ровной дороге. Что он сделает быстрее – спустится с горки и поднимется обратно, либо проедет такой же по длине путь по ровной дороге?

3. На шахматной доске стоит несколько королей, каждый бьет не более одного другого. Докажите, что королей не более 32.

4. В клетках таблицы 10×10 стоят 100 различных чисел. Макс выбрал в каждой строке максимальное число, и из этих 10 чисел выбрал наименьшее. Минька выбрал в каждом столбце наименьшее число, и из этих 10 чисел выбрал наибольшее. У кого из них число больше?

5. Найдутся ли натуральные a и b такие, что НОК(a, b)=a+b?

6. Каких трехзначных чисел больше: тех, у которых цифры строго возрастают или тех, у кого они строго убывают?

В качестве посредника может выступать искусственно введённая величина, например стоимость. Тут надо умело подобрать цену за штуку. Цены разных штук могут быть разными, и валют может быть несколько. Стоимость удобна, поскольку можно менять число штук.

7. Семь карандашей дешевле пяти тетрадей. Что дороже: девять карандашей или семь тетрадей?

8. Две майки и 3 сайки дешевле 200 руб, а 7 маек и 8 саек дороже 600 руб. Что дороже: майка или сайка?

Посредники могут образовывать цепочку: $A<P_1<P_2<\ldots<P_n<B$. Часто такую цепочку можно получить, изменяя A шаг за шагом, пока не получится B.

9. Докажите, что любое многозначное число больше произведения своих цифр.

10. Есть 100 пар дедов Морозов со Снегурочками, каждый выше своей Снегурочки. Докажите, что если распределить Снегурочек по росту (самому высокому – самую высокую, и т.д.), то все равно каждый дед Мороз окажется выше доставшейся ему Снегурочки.

Ещё задачи

По1. На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр в каждом из чисел, неизвестно). На доске осталось:

$$11\ldots 73\times12\ldots 65 = 123\ldots 45.$$

Могло ли исходное равенство быть верным?

По2. **а)** Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Может ли случиться, что сумма чисел, выбранных Яшей больше суммы чисел, выбранных Юрой?

б) Может ли сумма чисел, выбранных Яшей быть равна сумме чисел, выбранных Юрой?