

Расстояния в графах

Определения. Пути в графе идут по ребрам как по дорогам. Граф *связный*, если между каждой парой его вершин есть путь. *Длина пути* – это число ребер в нем. *Расстояние* между вершинами – это длина кратчайшего пути между вершинами (если такой путь есть). Расстояние между вершинами А и В обозначим $|AB|$.

Диаметр связного графа – наибольшее из расстояний между его вершинами.

1. Рассмотрим граф куба (вершины – вершины, ребра – ребра).
 - а) Есть ли в этом графе путь длины 100?
 - б) Какова длина самого длинного пути, где вершины не повторяются?
 - в) Каков диаметр этого графа?
 2. **Теорема.** Докажите, что для любых трех вершин связного графа выполнено *неравенство треугольника*: $|AC| \leq |AB| + |BC|$.
 3. а) В графе диаметра 1 всего n вершин. Какое наибольшее число ребер может быть в этом графе.
б) Тот же вопрос про граф диаметра 2 с 10-ю вершинами.
 4. а) В связном графе расстояние между вершинами А и В равно диаметру графа. Выкинули вершину В и все выходящие из неё рёбра. Докажите, что остался связный граф.
 5. Из графа выкинули одну вершину и все выходящие из неё рёбра. Мог ли диаметр графа
 - а) увеличиться на 1?
 - б) увеличиться втрое?
- Определения.** *Степень* вершины – это число выходящих из неё рёбер.
6. Найдите все связные графы с 10-ю вершинами, у которых степени всех вершин равны 2.
 7. Какое наименьшее число вершин может быть в графе диаметра d , если все степени его вершин равны s ? Рассмотрите случаи
 - а) $d=5, s=2$; б) $d=2, s=3$; в) $d=2, s=4$; д) $d=3, s=3$.
 8. Какое наибольшее число вершин может быть в графе диаметра d , если все степени его вершин равны s ? Рассмотрите случаи
 - а) $d=5, s=2$; б*) $d=2, s=3$.

Ещё задачи

РГ1. Из шахматной доски выкинули часть клеток, так что по-прежнему есть путь короля между любой парой оставшихся клеток. Сделаем из такой доски граф короля. Какой наибольший диаметр может быть у этого графа?

РГ2. Клетчатую доску со стороной N превратили в граф коня. Расстояние от угловой клетки до любой другой угловой одно и то же. Найдите N .

РГ3. Империя Огогондия распалась на 16 независимых республик. Каждая республика граничит ровно с тремя другими. Страны Большой Восьмёрки готовы оказать гуманитарную помощь паре республик каждая, при условии, что эти республики пары граничат между собой. Обязательно ли 16 республик можно разбить на такие пары?

Сириус, 7А класс, 10 сентября 2016 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Sirius/1609/index.html>