Числовые конструкции

1. Придумайте четыре натуральных числа так, чтобы произведение любых двух не делилось ни на какое из остальных, а произведение любых трех делилось на оставшееся число.

2. Существуют ли 5 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится на другое, но квадрат любого числа делится на каждое из остальных? А если потребовать, чтобы квадрат делился на произведение остальных?

3. **а)** Приведите пример натурального числа, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.
б) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, а треть — куб.

4. Расставьте в вершинах куба натуральные числа, так, что числа в соседних вершинах будут иметь общий делитель, а другие пары чисел будут взаимно просты.

5. Существуют ли такие натуральные числа $a_1>a_2>...>a_{10}$, что НОД(a_1,a_2) < НОД(a_2,a_3) <...< НОД(a_9,a_{10})?

6. Существуют ли 10 различных натуральных чисел, таких что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?

7. Докажите, что найдутся 100 последовательных составных чисел.

8. На доске выписаны числа 1, 2, ..., 100. На каждом этапе одновременно стираются все числа, не имеющие среди нестёртых чисел делителей, кроме себя самого. Например, на первом этапе стирается только число 1. Какие числа будут стёрты на последнем этапе?

9. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

10. Можно ли расставить по кругу **(а)** 10; **(б)** 11 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?