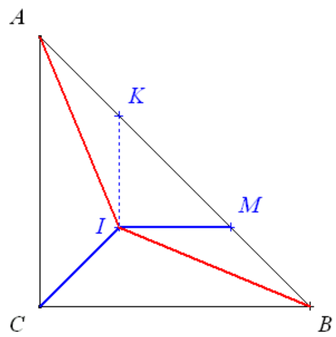
Олимпиада 7 класса: условия и решения

1. 30 школьников сдавали задачи по алгебре, геометрии, теории чисел и графам. Сначала каждый ответил на вопрос «Сколько человек сдали по столько же задач по алгебре, сколько и ты?», потом каждый ответил на такие же вопросы про геометрию, про теорию чисел и про графы. Могут ли среди 120 названных чисел встретиться 11 различных четных чисел?

Решение. По итогам каждой темы разобьём школьников на группы с одинаковым числом решенных задач по этой теме. Сложив размеры групп по одномй теме, получим общее число школьников, то есть 30. Сложив размеры групп по всем темам, получим учетверенное число участников, то есть 120.

Если увеличить названные числа на 1, получим для каждого участника размеры групп, в которые он входил по итогам тем. Если бы среди названных были 11 различных четных чисел, то встретились бы группы 11 различных нечетных размеров. Сумма этих размеров не превосходит суммы размеров всех групп (равна, если все группы разного размера, и меньше, если есть группы одинаковых размеров). Однако уже эта сумма была бы не меньше, чем сумма 11 наименьших нечетных чисел $1+3+\ldots+19+21=121>120$. Значит, 11 различных четных чисел встретиться не могли.

2. Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на четыре треугольника так, чтобы три из них были равны между собой, и любым из этих трёх можно было накрыть не равный им четвёртый.



Решение. Рассмотрим (см. рис.) точку I пересечения биссектрис нашего равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) (I – центр вписанной окружности треугольника). Тогда треугольники ACI и BCI равны по двум сторонам и углу между ними (AC=BC, CI – общая, $\angle ACI=\angle BCI$). Пусть точки M и K симметричны точке C относительно биссектрис AI и BI соответственно. Тогда треугольники ACI и AMI равны как симметричные относительно AI , а треугольники BCI и BKI равны как симметричные относительно BI, т.е. все эти четыре треугольника равны между собой (выше доказано равенство треугольников ACI и BCI). Значит, если мы разрежем исходный треугольник на треугольники ACI, BCI, AMI и BMI, то первые три треугольника равны между собой, а четвёртый треугольник накрывается каждым из этих трёх, т.к. треугольник BMI является частью равного им треугольника BKI.

3. Красные отметки делят провод на 101 равную часть, а синие – на 73 равные части. Провод разрезали по всем отметкам. Сколько кусков провода имеют наименьшую длину?

Ответ. 2 куска. **Решение.** Возьмем провод длиной 7373 см. Тогда красные отметки делят его на куски 73 см, синие – на куски 101 см. Все отметки находятся на целом расстоянии от концов, поэтому все куски будут целой длины (в см). Значит, кусок не может быть короче 1 см. Докажем, что есть ровно два куска длиной 1 см: у одного левый конец красный, правый – синий, у другого – наоборот. Пусть m – расстояние от правого конца такого отрезка до левого конца провода. В первом случае это равносильно тому, что $m=1 (\mathrm{mod}\ 73)$ и $m=0 (\mathrm{mod}\ 101)$, во втором – $m=1 (\mathrm{mod}\ 101)$ и $m=0 (\mathrm{mod}\ 73)$. По китайской теореме об остатках среди чисел от 1 до 7373 найдется ровно по одному числу каждого вида.

4. К открытию олимпиады в Сочи прибыли менее 2014 участников, из них ровно 1/99 часть – из Африки. Всех их построили прямоугольником. Могло ли быть, что африканцы есть не менее чем в 44% продольных рядов и не менее, чем в 44% поперечных? Если да, то сколько всего участников прибыло к открытию?

Ответ. Могло,1980 участников. **Решение.** Пусть есть r африканцев, m поперечных и n продольных рядов. Тогда всего участников $99r=mn$. Так как $99r<2014$, то $r<2014/99=20\,{}^{34}/_{99}$, то есть $r\le 20$. Число африканцев не меньше числа параллельных рядов с африканцами, то есть $r\ge 0{,}44m$ и $r\ge 0{,}44n$. Перемножив эти два неравенства, получим $r^2\ge 0{,}44^2mn=0{,}44^2\cdot 99r$, откуда $r\ge 0{,}44^2\cdot 99=19{,}1664$, то есть $r=20$. Значит, всего спортсменов $99\cdot 20=1980$.

Теперь убедимся, что условие задачи непротиворечиво, и при 1980 участниках такое построение возможно. Выстроим участников прямоугольником 44·45, и поставим 20 африканцев по диагонали от какого-нибудь угла. Тогда будет по 20 продольных и поперечных рядов с африканцами, и действительно 20/44>20/45>0,44.

> **5.** В некоторых клетках прямоугольной таблицы стоят крестики. Докажите, что их можно раскрасить в 2 цвета так, чтобы число крестиков каждого цвета во всей таблице отличалось не более, чем на 1, в каждой строке отличалось не более, чем на 1 и в каждом столбце отличалось не более, чем на 1.

Решение. (А.Ефремов)
Построим двудольный граф: столбцы и строки таблицы – вершины, ребро соединяет строку и столбец, если на их пересечении стоит крестик. Тогда задача равносильна покраске ребер в два цвета (скажем, белый и черный) так, чтобы общее число белых и черных ребер отличалось не более, чем на 1, и среди ребер, выходящих из каждой вершины, число белых и черных отличалось не более, чем на 1. Если есть вершины нечетной степени, добавим фиктивную вершину F, и соединеним её фиктивными ребрами со всеми такими вершинами. По лемме о рукопожатиях степень F – четна. Теперь степени всех вершин четны. Разобьем полученный граф на компоненты связности, и построим в каждой эйлеров цикл. Во всех циклах красим ребра по очереди в черный и белый цвет в порядке обхода, начав обход с любой вершины (но, если F добавлена, начинаем с F). Тогда в каждом цикле четной длины будет поровну черных и белых ребер. А так как компоненты без F – двудольны, то в них длина циклов заведомо четна. Значит, единственный случай, когда ребер двух цветов не поровну – при нечетном цикле с F.
1) Пусть все циклы – четны. Тогда всего черных и белых ребер – поровну. Кроме того, каждый проход цикла через любую вершину давал пару из черного и белого ребра, поэтому из каждой вершины белых и черных выходит поровну. Выкинув F и фиктивные ребра, мы выкинем черных и белых поровну. Тогда в целом равенство черных и белых останется, а в каждой вершине разница может увеличится до 1 за счет исчезновения одного фиктивного ребра.
2) Пусть цикл с F – нечетный. Тогда всего черных ребер на 1 больше, чем белых, во всех вершинах, кроме F, черных и белых поровну, а из F выходят два лишних черных ребра: первое и последнее ребро цикла – черные, а все остальные проходы через F давали пару из черного и белого ребер. . Выкинув F и фиктивные ребра, мы выкинем черных больше на 2, поэтому в целом белых станет на 1 больше. А в каждой вершине разница может увеличится до 1 за счет исчезновения одного фиктивного ребра.