

## Теоретические вопросы к зачету, 7 класс

### Алгебра

1. Что такое арифметическая прогрессия? Напишите и докажите формулу для суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии.
2. Что такое геометрическая прогрессия? Напишите и докажите формулу для суммы  $n$  первых членов геометрической прогрессии.
3. Приведите формулу для суммы  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$  и докажите ее.

### Теория чисел

4. Докажите, что простых чисел вида  $4k-1$  бесконечно много.
5. Докажите, что для любых натуральных  $a$  и  $b$  можно подобрать целые  $x$  и  $y$  так, чтобы  $\text{НОД}(a, b)=ax+by$ .
6. Докажите **китайскую теорему об остатках**: Пусть числа  $m_1, m_2, \dots, m_n$  попарно взаимно просты. Тогда для любых натуральных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  найдется натуральное число  $x$ , такое что  $x \equiv a_i \pmod{m_i}$  для всех  $i$ . Более того,  $x$  определен однозначно с точностью до прибавления кратного  $M=m_1 m_2 \dots m_n$ .
7. Докажите, что всякое натуральное число единственным образом представляется как сумма различных степеней двойки.

### Геометрия

8. Дайте определение выпуклого многоугольника. Докажите, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего меньше.
9. Треугольник лежит внутри другого треугольника. Докажите, что наибольшая сторона внутреннего не превосходит наибольшей стороны внешнего.
10. Как найти площадь описанного многоугольника, зная радиус окружности и периметр многоугольника? Приведите формулу и докажите её.
11. Докажите, что биссектрисы двух внешних углов треугольника и третьего внутреннего угла пересекаются в одной точке. Как называется эта точка?
12. Докажите, что биссектриса лежит между медианой и высотой.
13. Докажите **неравенство третьих сторон**: Если в треугольниках  $ABC$  и  $A'B'C'$  равны по 2 стороны:  $AB=A'B'$ ,  $AC=A'C'$ , то  $\angle A > \angle A' \Leftrightarrow BC > B'C'$  (третья сторона тем больше, чем больше угол между равными сторонами).
14. Найдите радиусы вписанной и невписанных окружностей прямоугольного треугольника, катеты которого равны  $a$  и  $b$ , а гипотенуза  $c$ .
15. Докажите, что в одной точке пересекаются отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с противоположными сторонами. Как называется эта точка?
16. Докажите, что сумма углов в невыпуклом  $n$ -угольнике равна  $180^\circ(n-2)$ .
17. Докажите, что если  $AL$  – биссектриса треугольника  $ABC$ , то  $BL:CL=AB:AC$ .
18. **Формула Пика**. Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой бумаги с клетками размера  $1 \times 1$ . Внутри его лежит  $n$  узлов, а на границе  $m$  узлов. Докажите, что площадь этого многоугольника равна  $n + \frac{m}{2} - 1$ .

### Теория графов

19. Дайте определение гамильтонова графа. Докажите **теорему Дирака**: если в графе на  $N$  вершинах ( $N > 2$ ) степени каждой вершины не менее  $N/2$ , то граф гамильтонов.
20. Какой граф называют турниром? Докажите, что любой турнир полугамильтонов.
21. Докажите, что в графе с  $n$  вершинами и  $c$  компонентами связности есть не менее  $n-c$  ребер.
22. Докажите, что если в графе ребер не меньше, чем вершин, в нём есть цикл.
23. Что такое эйлеров путь и эйлеров цикл в графе? При каких условиях в графе существует эйлеров путь? Докажите, что в если в связном графе степени всех вершин чётны, то в нём есть эйлеров цикл.