Разнобой

ЖА1. Дан клетчатый квадрат 8×8. На какое наибольшее число прямоугольников различных *периметров* можно его разрезать по клеточкам?

ЖА2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида "уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника", где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

ЖА3. При каких N кратчайший путь коня между любыми двумя угловыми клетками доски N×N состоит из одного и того же числа ходов?

ММ6в. Найдется ли строка из 100 натуральных чисел, где каждое следующее делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр?

ММ7. Есть три игральных кубика с нестандартными наборами чисел на гранях. Скажем, что кубик А *выигрывает* у кубика В, если при их одновременном бросании число на А чаще оказывается больше числа на В, чем наоборот. Может ли первый кубик выигрывать у второго, второй – у третьего, а третий – у первого?

РС1. Найдите сумму $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+...+100\cdot103$.

РС2. Найдите формулу для суммы $1^3+2^3+3^3+...+n^3$.

РС3. Докажите, что $1/1^2+1/2^2+1/3^2+...+1/n^2<2$.

Пл11. Внутри равностороннего треугольника выбрана точка, и из нее опущены перпендикуляры на все три стороны. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров не зависит от выбора точки.

ПН1. 100 плохишей получили каждый по бочке варенья и корзине печенья. У каждого вес варенья отличается от веса печенья (в ту или другую сторону) не более чем на 5 кг. Докажите, что если и бочки, и корзины пронумеровать по убыванию веса, то у емкостей с одинаковыми номерами веса содержимого будут отличаться не более, чем на 5 кг.

ПН2. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Докажите, что сумма чисел, выбранных Яшей не больше суммы чисел, выбранных Юрой.

ПН3. Выбрано n натуральных чисел, никакое из них не делится на другие. Докажите, что их сумма не меньше n^2.

В задачах ИК докажите, что для любого n найдется

ИК1. Конечный набор точек плоскости такой, что на расстоянии 1 от каждой точки было ровно n отмеченных точек.

ИК2а. палиндром (*не меняется при чтении задом наперед*), кратный 2^n;

ИК2б. палиндром, кратный 6^n;

ИК3а. степень 5 с суммой цифр больше n;

ГМТ6. На сторонах треугольника ABC вовне его построены правильные треугольники ABC', BCA' и CAB'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

ГМТ7. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.

УК10. а) От квадрата со стороной 1 отрезали 4 равных прямоугольника с периметром 2. В центре остался меньший квадрат. Какой размер может быть у него?

б) Можно ли разрезать квадрат на 13 прямоугольников (возможно, не одинаковых) с одинаковым периметром вдвое меньшим чем у квадрата?

ЦН2. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами? Иными словами, имеет ли решение в целых числах неравенство: $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

ЦН3. Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $\dfrac{m+2000n}{n+2000m}$ можно сократить на число d. Каково наибольшее возможное значение d ?

РУ2в. Торт имеет форму треугольника с углами 20°, 30°, 130°. Коробка для торта имеет форму того же треугольника, но симметрична ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет (не переворачивая) уложить в эту коробку?

РУ3. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разбить на подобные непрямоугольные треугольники?
По9в. На плоскости нарисовано множество единичных отрезков, каждые два имеют общую точку. Докажите, что все отрезки можно накрыть кругом радиуса 1,5.
Ре1. Есть 64 монеты двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты *разного* веса не более чем за 6 взвешиваний?
Ре2. Можно ли из доминошек 2×1 сложить квадрат 30×30 так, чтобы каждая доминошка граничила по отрезку с нечетным числом других?
Ре3. Существует ли многоугольник и точка снаружи, из которой ни одна из сторон многоугольника не видна полностью?
НУ10. В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?
СГ8. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
СГ9. В клетки пустой доски 20×16 первые 34 крестика можно поставить произвольно. Дальше, если удастся найти четверку клеток на пересечении двух строк и двух столбцов, где есть уже ровно 3 крестика, можно ставить крестик в пустую клетку этой четверки. Докажите, что всю доску заполнить не удастся.
Из8. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части и разложить части каждой плитки в две разные кучки так, чтобы из N частей одной кучки можно было сложить квадрат, а из N частей другой кучки – прямоугольник.
НД6. Суду предъявлен набор из 120 пронумерованных монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)
г*) Суд уже установил, что фальшивых монет 1 или 2. Докажите, что адвокат *не сможет*, не нарушая обязательств, убедить суд, что фальшивых монет 1, а не 2.
д*) То же, но *всего монет* 11. Суд уже установил, что фальшивых монет 1 или 2. Как адвокату показать, что их ровно 2?
ИС7. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?
РР8. В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Могла ли продавщица после каждого из первых 10 покупателей сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек? Если да, то сколько сыра осталось в магазине после первых 10 покупателей?
ИДБ6б. В n коробках, стоящих в ряд, лежали орехи, на каждой коробке число орехов было написано. Орехи переложили по этим коробкам строго как попало. Теперь за одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за n–1 такую операцию можно разложить орехи согласно надписям.
Пд8. Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий – через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?
СЧ9. Докажите, что из любого треугольника площади 20 можно вырезать
а) равнобедренный треугольник площади больше 12;
б) осесимметричную фигуру площади больше 15.
ИД8. Вначале есть 100 прямоугольников 2×1. Каждым ходом надо выбрать из имеющихся два прямоугольника с равной стороной и склеить их по этой стороне в один больший прямоугольник. Двое ходят по очереди, кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

ТД7. На пирог может прийти либо p гостей, либо q. Надо заранее разрезать пирог на куски (не обязательно равные), чтобы в любом случае его можно было раздать поровну. Докажите, что если p и q взаимно просты, то минимальное число кусков равно $p+q-1$.
Указание. Рассмотрите граф: $p+q$ гостей – это вершины, два гостя связаны ребром если, согласно плану хозяйки, они должны были есть один и тот же кусок. Докажите, что этот граф – связный.