

## Подмена объекта

Часто можно подменить исследуемый объект или процесс так, что с точки зрения целей исследования замена ничего не меняет, но само исследование при этом значительно упрощается. Мы уже видели примеры таких подмен в теме «Изоморфизм». При подсчётах важно выбрать удобную величину или группу величин.

1. От школы потребовали срочно обеспечить 100 электрических розеток в компьютерном классе для одновременной зарядки 100 планшетов. Пока такая розетка лишь одна, но можно подключить удлинители.

а) На складе есть удлинители на 3 розетки, на 5 розеток и на 6 розеток. Каким наименьшим числом удлинителей можно обойтись?

б) Удлинители есть только в магазине. Удлинитель на 3 розетки стоит 210 руб, на 5 розеток — 400 руб, на 6 розеток — 550 руб. Какую наименьшую сумму надо затратить, чтобы выполнить требование?

Подменяем на аналогичный объект, но устроенный проще.

2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  периметра 16 см с основанием  $AB=6$  см. 1-я окружность вписана в него, в ней проведен диаметр, параллельный  $AC$ . 2-я окружность касается боковых сторон и 1-й окружности, в ней тоже проведен диаметр, параллельный  $AC$ . 3-я окружность касается боковых сторон и 2-й окружности, в ней тоже проведен диаметр, и т.д. построено 100 окружностей с диаметрами. Докажите, что сумма проведенных диаметров меньше 4 см.

3. Три друга гонят самогон, каждый своим аппаратом. У Труса течет жидкость крепостью  $a$  градусов, и стандартная бутылка наполняется за  $a$  часов; у Балбеса соответственно -  $b$  градусов и за  $b$  часов, у Бывалого -  $c$  градусов и за  $c$  часов. Для ускорения процесса друзья направили все шланги в одну бутылку и наполнили ее за сутки. Какова крепость смеси? (Примечание: крепость - это процент содержания спирта).

4. Можно ли из последовательности  $1, 1/2, 1/3, \dots$  выбрать (сохраняя порядок) десять чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих?

5. Жесткий квадратный проволочный контур со стороной 1 дм разрезали на части, части переложили и спаяли новый плоский замкнутый несамопересекающийся контур.

а) Резали на три части. Какую наибольшую площадь может охватывать новый контур?

б) Резали на 4 части. Могла ли площадь, охватываемая контуром, увеличиться не менее чем на 5%?

6. Рассматриваются такие наборы  $(x_1, x_2, \dots, x_{20})$  чисел, заключенных между 0 и 1, что  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{20})$ . Найдите среди этих наборов такой, для которого значение произведения  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{20}$  максимально.

Аналогично дополнительному построению в геометрии мы можем не заменять, а добавить более простой объект или персонажа.

7. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на клетчатой доске  $100 \times 100$ , каждым ходом - на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишки стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго.

## Ещё задача

8. Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями Ватсон и на 20% быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?