

## Индукция. Доказывай больше

Для шага индукции может потребоваться больше свойств, чем мы хотим доказать. Нередко эти дополнительные свойства доказывают тоже по индукции, расширив на них доказываемое утверждение. Фактически, мы меняем доказываемое утверждение.

1. Докажите, что  $1/1 \cdot 3 + 1/3 \cdot 5 + \dots + 1/(2n-1) \cdot (2n+1) < 1/2$ .

2. Дан равносторонний треугольник со сторонами длины 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после  $n$  ходов наибольшая сторона будет меньше  $(n+2)$ -го члена ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Когда на следующем уровне объектов больше, не все из них опираются на объекты предыдущего уровня. Так, на дереве ветки с плодами могут расти из ветвей без плодов. Можно попробовать доказать утверждение для объектов более широкого класса – как раз тех, на которые удобно опираться.

3. Назовем натуральное число *ровным*, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое  $n$ -значное число можно представить как сумму не более чем  $n+1$  ровных чисел.

4. Каждая клетка клетчатой доски  $n \times n$  раскрашена в белый или черный цвет.

Оказалось, что каждая клетка граничит по стороне ровно с двумя клетками противоположного цвета. Докажите, что раскраска симметрична относительно диагонали.

5. В выпуклом  $n$ -угольнике проведено  $m$  диагоналей так, что любые две из них имеют общую точку (внутри или в вершине). Докажите, что  $m \leq n$ .

### Ещё задача

В некоторых случаях более сильное утверждение доказывать легче.

6. а) В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

б) В  $n$  коробках, стоящих в ряд, лежали орехи, на каждой коробке число орехов было написано. Орехи переложили по этим коробкам строго как попало. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за  $n-1$  такую операцию можно разложить орехи согласно надписям.