

## Индукция: спуск по лестнице

1. Докажите, что числа 54444411 и 544444411 делятся на 7.
2. Какое из чисел больше  $2^{2^{\dots^2}}$  (100 двоек) или  $3^{3^{\dots^3}}$  (99 троек)? (Здесь  $a^b=a^b$ , возведения в степень выполняются *справа налево*).
3. На клетчатой доске  $100 \times 100$  стоят несколько слонов. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы слоны одинакового цвета друг друга не били.
4. В Зазеркалье все дороги между городами – односторонние, и, выехав из города, вернуться в него нельзя. Докажите, что города можно занумеровать по порядку так, чтобы при проезде по любой дороге номер города уменьшался.
5. На доске выписаны числа  $1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ . Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность – неотрицательное число. **Операции прекращаются, когда на доске останется одно число. Докажите, что можно оставить любое нечетное число от 1 до  $2^n - 1$ .**

### Рекурсия

*Редукция* сводит решение задачи к более простой. Пусть удастся свести к такой же задаче с меньшим значением полуинварианта. Если полуинвариант не может уменьшаться бесконечно, а для его крайних значений задача решена, то это – *рекурсия*. Такую *цепочку редукций* тоже оформляют как индукцию, объявляя полуинвариант параметром индукции.

**6. Теорема.** Сумма углов в невыпуклом  $n$ -угольнике равна  $180^\circ(n-2)$ .

Индукция незаменима при логической рекурсии («иль думал, что я думала, что думал он я сплю»).

**8.** Двум логикам сообщили на ухо два натуральных числа, а вслух сообщили, что числа отличаются на 1. Далее их по очереди много раз спрашивают, знают ли они число другого, и те вслух говорят «Да» или «Нет». Докажите, что рано или поздно кто-то скажет «Да».

### Индукция-спуск: еще задачи

7. В городе 100 домов. Какое наибольшее число замкнутых непересекающихся заборов можно построить так, чтобы любые два забора ограничивали разные группы домов?
9. 10 бандитов ограбили банк на миллион долларов и уселись в ряд за стол делить деньги. Сначала первый предлагает, кому сколько: мне столько-то, второму столько-то и т.д., и все 10 голосуют. Если «за» не менее половины, то предложение принимается, каждый получает предложенную долю, и все расходятся. Если более половины голосуют «против», первого убивают, и тогда уже второй бандит предлагает кому сколько на тех же условиях, и т.д. Каждый бандит руководствуется в первую очередь желанием выжить, во вторую (если жизнь вне опасности) – получить побольше денег, в третью (если на жизнь и сумму это не влияет) – не убивать без необходимости (дело-то не последнее!). Как распределятся деньги, если все бандиты будут действовать и рассуждать абсолютно логически?

Сириус, 7 класс, 16 июня 2016 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Sirius/1606/index.html>