Китайская теорема об остатках

Р.С. Ефремов

1. **а)** Для каждого целого числа запишем пару остатков от его деления на 25 и на 4 соответственно. Сколько различных пар получится?
   б) Числа a и b взаимно просты. Докажите, что при делении чисел от 1 до ab на a и на b получаются все возможные пары остатков.
2. **Теорема.** Для взаимно простых чисел a и b и любой пары неотрицательных остатков $m<a$ и $n<b$ среди чисел от 1 до ab найдется ровно одно число c такое, что при делении на a c даёт в остатке m, а при делении на b даёт в остатке n.
3. **а)** Решите в целых числах уравнение $10x+8=11y+10$
   б) Найдите все числа, дающие при делении на 10 остаток 8, а при делении на 11 остаток 10.
   в) Найдите все числа, дающие при делении на 8 остаток 2, а при делении на 13 остаток 11.
4. Найдите все числа, которое при делении на 3 дает остаток 1, при делении на 4 – остаток 2 и при делении на 11 – остаток 3.
5. Генерал построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, генерал посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Какое наименьшее число солдат могло быть у генерала?
6. **Китайская теорема об остатках.** Пусть числа $m_1,m_2,\ldots,m_n$ попарно взаимно просты. Тогда для любых натуральных $a_1,a_2,\ldots,a_n$ найдется натуральное число x, такое что $x \equiv_{m_i} a_i$ для всех i. Более того, x определен однозначно с точностью до прибавления кратного $M=m_1m_2\ldots m_n$.
7. Существует ли такое n кратное 4, что $n+4$ кратно 9, а $n+9$ кратно 25?
8. Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \ldots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}$, …, $a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.
9. Получив натуральное число N, Дима разделил его на 101 и получил в остатке $m>0$. Затем Дима разделил N на m и получил в остатке p. Найдите наибольшее значение p и наименьшее N при котором это значение достигается?
10. Докажите, что найдутся 1000 последовательных чисел, каждое из которых *не является* **а)** простым числом или степенью простого числа; б) степенью (не ниже второй) натурального числа.
11. Назовем число хорошим, если оно делится на квадрат натурального числа >1. При каких N найдется N последовательных хороших чисел? (Пример для N=3: 48, 49, 50).
12. Для какого наибольшего N найдутся N последовательных натуральных чисел таких, что сумма цифр первого делится на 1, второго на 2, третьего на 3 и т.д.

13. Можно ли расставить на доске 17×101 натуральные числа от 1 до 1717 так, чтобы сумма чисел в любом прямоугольнике 1×2 делилась либо на 17 либо на 101?

14. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить местами так, чтобы для всех n сумма n первых чисел делилась а) на n; б) на $n+1$-е число.