

Задача о беспризорнике Васе и окурках

Л.А.Емельянов

1. Найдите все натуральные n , для которых верно утверждение: «равносторонний описанный n -угольник – правильный».
2. Даны три одинаковые непересекающиеся окружности S_1 , S_2 и S_3 с центрами в точках O_1 , O_2 и O_3 . Из центра каждой окружности проведены касательные к двум другим такие, что между ними нет точек этих двух окружностей. Шесть построенных прямых в пересечении образовали выпуклый шестиугольник. Докажите, что сумма длин трёх сторон шестиугольника, не имеющих общих концов, равна сумме длин других трёх сторон.
3. Пусть B_1 – точка на стороне AC треугольника ABC . Окружности, вписанные в треугольники ABB_1 и CB_1B , касаются тогда и только тогда, когда B_1 совпадает с точкой касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC . Сформулируйте и докажите факт, аналогичный предыдущему, но относящийся к внеписанным окружностям.
4. К двум непересекающимся окружностям проведены общие внешние касательные a_1 и a_2 , и общие внутренние касательные b_1 и b_2 . Тогда длины отрезков прямых b_1 и b_2 , заключённые между прямыми a_1 и a_2 , равны длинам общих внешних касательных. Сформулируйте и докажите факт, аналогичный предыдущему, но получаемый переменной ролей прямых a и b .
5. На стороне AC выбрана произвольная точка B_1 . В треугольники ABB_1 и CB_1B вписаны окружности a и c и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от AC . Эта касательная пересекает отрезок BB_1 в точке K . Докажите, что длина отрезка BK не зависит от выбора точки B_1 .
6. Сформулируйте и докажите факт предыдущей задачи для внеписанных окружностей. Найдите длину отрезка постоянной длины, выразив её через стороны треугольника.