

В ряд лежали яблоки и груши...

Непрерывная комбинаторика: Порядок и комбинирование.

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важный прием – упорядочить объекты по весу. Это помогает комбинировать их в пары и группы. Группы, в свою очередь, тоже можно комбинировать.

0. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: «Любые два камня вместе тяжелее одного?»

1. а) На витрине в порядке убывания масс лежат 5 яблок разного веса. Известно, что одно из яблок весит в 4 раза меньше, чем все остальные яблоки вместе. На каком месте в ряду оно может лежать?

б) На витрине в порядке убывания масс лежат 10 груш разного веса. Известно, что одна из груш – самая вкусная – ровно вдвое легче всех остальных вместе взятых. За какое наименьшее число взвешиваний можно её найти?

2. В ряду яблок каждые два соседних отличаются не более, чем на 10 г. Их переложили по в ряд по возрастанию веса. Докажите, что по-прежнему каждые два соседних отличаются не более, чем на 10 г.

3. В ряд лежит 150 груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более, чем на 1 г. При этом в каждом пакете должно быть

а) по 2 груши;

б) по 3 груши.

4. а) Имеются 4 яблока, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разбить на две пары так, чтобы веса пар отличались не более, чем в полтора раза.

б) Имеются 100 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в два раза.

в) Имеются 200 лимонов, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре лимона так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

Если есть некоторое универсальное свойство всех объектов (или наборов), то часто получают полезные следствия, применяя утверждение для умело выбранных наборов. Часто универсальное утверждение получают, предполагая противное.

5. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом.

Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что

а) найдутся по крайней мере 200 яблок одинакового веса;

б) есть раскладка, когда по крайней мере 3 пакета весят одинаково;

в) есть раскладка, когда по крайней мере 6 пакетов весят одинаково;

г) нельзя разложить часть яблок в 10 пакетов так, чтобы в пакетах было поровну яблок, но все веса были различны;

д*) найдутся по крайней мере 350 яблок одинакового веса.

е) При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k яблок одинакового веса?**