

Линейные представления целых чисел

Р.С.Ефремов

1. Фома умеет печатать 7-рублевки, а Ерёма – 13-рублёвки.
 - а) Может ли Фома заплатить Ерёме 100 рублей (со сдачей)?
 - б) Может ли Ерёма заплатить Фоме 100 рублей (со сдачей)?
 - в) В каждом случае, когда можно, какое наименьшее число купюр им придётся напечатать?
2. Фома и Ерёма объединились. Могут ли они заплатить в магазине без сдачи
 - а) 999 рублей? б) 58 рублей.
 - в) Какое наибольшее натуральное число рублей они не могут заплатить без сдачи?
 - г) Сколькими способами они могут заплатить без сдачи 2016 руб?
3. Есть неограниченное число m -рублевки и n -рублевки. m и n взаимно просты.
 - а) Докажите, что ими можно без сдачи заплатить любую целую сумму не меньшую mn .
 - б) Наибольшее целое число рублей, которое нельзя заплатить без сдачи, равно $(n - 1)(m - 1) - 1$?
4. В лифте действуют две кнопки: одна, позволяющая подниматься на a этажей вверх, и другая, позволяющая спускаться на b этажей вниз ($\text{НОД}(a,b)=1$). Мы говорим, что лифтом можно пользоваться, если с его помощью можно попасть с любого этажа на любой другой.
 - а) Докажите, что существует такое N (зависящее от a и b), что в доме высотой по крайней мере в N этажей пользоваться лифтом можно.
 - б) Найдите наименьшее N , для которого имеет место утверждение пункта а).
5.
 - а) Найдите наименьшее натуральное число, которое ровно двумя способами можно представить в виде $3x+4y$, где x и y – натуральные числа.
 - б) Найдите наименьшее c , при котором уравнение $7x + 9y = c$ имело бы ровно 6 целых положительных решений.
6. Пусть числа a и b взаимно просты. Докажите, что для того, чтобы уравнение $ax + by = c$ имело ровно n целых положительных решений, значение c должно находиться в пределах $(n - 1)ab + a + b \leq c \leq (n + 1)ab$.
7. Найдите наибольшее натуральное число N , для которого уравнение $99x + 100y + 101z = N$ имеет единственное решение в натуральных числах x, y, z .
8. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 2013$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
9. Из-за типографской ошибки последняя цифра натурального числа N напечаталась как показатель степени (например, $N = 128$ заменилось бы на 12^8). Результат оказался кратным N .
 - а) Докажите, что количество таких N конечно.
 - б) Докажите, что количество таких N не более 200.
 - в) Найдите все такие N .
10. Отметим на прямой красным цветом все точки вида $81x + 100y$, где x, y – натуральные, и синим цветом – остальные целые точки. Найдите на прямой такую точку, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета.