В ряд лежали яблоки и груши…

Непрерывная комбинаторика: Порядок

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов нецелого веса. Важным приемом является упорядочение объектов.

0. Есть несколько камней, выложенных в порядке возрастания весов. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно проверить или опровергнуть утверждение: «Любые два камня вместе тяжелее одного?»

1. На витрине в порядке убывания масс лежат 10 фруктов. Известно, что самый вкусный ровно вдвое легче всех остальных вместе взятых. За какое наименьшее число взвешиваний можно его найти?

2. На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b. Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть больше Васи не более, чем на b.

3. В ряду яблок каждые два соседних отличаются не более, чем на 10 г. Их переложили по в ряд по возрастанию веса. Докажите, что по-прежнему каждые два соседних отличаются не более, чем на 10 г.

4. В ряд лежит четное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более, чем на 1 г.

5. а) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

6. а) Сборные Перу и Чили (по двое игроков в каждой) намерены сыграть серию матчей по борьбе, где более сильный игрок всегда побеждает более слабого. Для каждого матча организуется две пары: перуанец против чилийца, в каждой паре побеждает один из соперников, счет в матче – по числу побед. Организаторам известны сравнительные силы игроков внутри команды каждой из стран, но не между игроками из разных стран. Они собирается устраивать матчи до тех пор, пока какой-нибудь матч не закончится вничью (или пока не выяснится, что ничейный матч невозможен). Каким наименьшим числом матчей они всегда могут обойтись?
б) То же, но в командах по 12 игроков.

Если есть некоторое универсальное свойство всех объектов (или наборов), то часто получают полезные следствия, применяя утверждение для умело выбранных наборов. Часто универсальное утверждение получают, предполагая противное.

7. Есть 1000 яблок, которые надо разложить в 10 пакетов по 100 яблок в каждом. Оказалось, что при любой такой раскладке найдутся хотя бы два пакета одинакового веса. Докажите, что
а) найдутся по крайней мере 200 яблок одинакового веса;
б) есть раскладка, когда по крайней мере 3 пакета весят одинаково;
в) есть раскладка, когда по крайней мере 6 пакетов весят одинаково;
г) нельзя разложить часть яблок в 10 пакетов так, чтобы в пакетах было поровну яблок, но все веса были различны;
д*) найдутся по крайней мере 350 яблок одинакового веса.
е)** При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k яблок одинакового веса?