

Неравенство помогает уравнению

Крайний случай

1. У барона Мюнхгаузена есть затейливый набор из 8 гирек весами 1, 2, ..., 8 г. Барон, конечно, помнит, какая сколько весит, и хочет убедить в этом гостя. Он берется так провести одно взвешивание на чашечных весах без других гирь, что после этого гость сам сможет определить вес одной из гирь. Могут ли слова барона быть правдой?
2. За одно нажатие можно число на экране калькулятора увеличить на его дробную часть (например, из $\frac{3}{7}$ получить $\frac{6}{7}$, а из 3,8 получить $3,8 + 0,8 = 4,6$). Начав с положительного числа, меньшего 1, за три нажатия получили число 3. С какого числа начали?
3. В таблицу 25×25 вписали числа 1, 2, 3, ..., 25, каждое по 25 раз так, что для одной из диагоналей сумма чисел над ней оказалась ровно в три раза больше суммы чисел под этой диагональю. Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы.

Докажи, что нет других решений

4. а) Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 1680. Найдите эти числа.
б) Найдите все решения уравнения $x(x+1)(x+2)(x+3)=1680$.

5*. За столом сидят 7 гномов, перед каждым – кружка, в некоторые налит эль (но, быть может, не поровну). Первый разлил весь свой эль поровну в кружки всем остальным. Затем второй разлил свой эль поровну всем остальным (включая первого), затем третий гном и т.д. до седьмого. Когда и седьмой гном разлил свой эль, у всех оказалось столько же эля, сколько было вначале. Сколько эля в каждой кружке, если всего его 3 литра?

Двустороннее неравенство

6. Натуральные числа от 1 до mn выписали в порядке возрастания в клетки доски, содержащей m строчек и n столбцов, по строчкам, начиная с верхней. Известно, что число 49 находится в шестой строке, а 96 – в последней. Найдите m и n .
7. По итогам математической карусели шести командам раздали 45 лотерейных билетов. За более высокое место давали больше билетов. Известно, что все команды получили разное число билетов, причем первая команда получила билетов вдвое больше последней. Сколько билетов получила каждая из команд?
8. В вершинах квадрата записаны 4 двузначных числа. Сумма чисел на верхней стороне в 4 раза больше, чем на нижней, а сумма чисел на левой стороне в 5 раз больше, чем на правой. Найдите числа в вершинах.

Неравенства и перебор

9. Положительное число a округлили до ближайшего целого. В результате оно уменьшилось на 33%. Найдите a .
10. В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?