Точки на прямой и окружности

В некоторых задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов, но сами объекты выбираются из *бесконечного* набора, заданного *непрерывным параметром* или параметрами. Решение обычно состоит в комбинировании неравенств. Этому помогает наглядное представление в виде наборов точек на прямой и окружности, и рассмотрения полученных отрезков и дуг.

1. а) Из нескольких палочек надо сложить три отрезка одинаковой длины. Перед этим несколько раз можно распилить любую палочку или кусок на две части. Каким наименьшим числом распилов можно гарантированно обойтись?
б) Несколько кусков сыра требуется разложить на 7 кучек одинакового веса, разрезав предварительно несколько кусков на части. Каким наименьшим количеством разрезов можно гарантированно обойтись? (При любом разрезе один кусок распадается на два).

2. На пирог может прийти либо p гостей, либо q. Надо заранее разрезать пирог на куски (не обязательно равные), чтобы в любом случае его можно было раздать поровну.
а) Как разрезать на не более чем на $p+q-1$ кусков?
б) Каково минимальное число кусков при $p=4$, $q=6$?
в) Каково минимальное число кусков при $p=3$, $q=5$?
г)** Докажите, что если в (а) p и q взаимно просты, то меньше чем $p+q-1$ кусков не хватит.

3. Из палок длиной 1 собран каркас тетраэдра. Баба Яга сажает на каркас 7 пауков. Из расстояний между парами пауков (измеряемых кратчайшим путём по ребрам тетраэдра) Кащей выбирает наименьшее расстояние R и платит Яге R кг золота. Какое наибольшее количество золота может себе обеспечить Яга?
4. Есть 11 гирь, каждая весит меньше 100 г. Известно, что веса любых двух гирь отличаются больше, чем на 4 г. Докажите, что найдутся 4 гири такие, что их можно разбить на две пары, чьи веса отличаются меньше, чем на 4 г.

5. Есть 10 яблок, каждое весит не более 100 г, и две одинаковые тарелки. Докажите, что
а) можно выбрать какое-то количество яблок и положить их в одну или обе тарелки так, чтобы веса в тарелках отличались меньше, чем на 1 г.
б) можно положить в тарелки по одинаковому количеству яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше, чем на 2 г.
6. а) В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$. Докажите, что можно выделить одно или несколько подряд стоящих чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.
б) В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. При каком наименьшем n можно наверняка выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма отличалась от целого числа не больше, чем на 0,001.

8. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель – побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

9. а) Сколько целых чисел может лежать на отрезке числовой оси длины b?
б) Сколько целых чисел может лежать на интервале числовой оси длины b?
в) Известно, что число a положительно, а неравенство $1 < xa < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах. Сколько решений в целых числах может иметь неравенство
$2 < xa < 3$?

Ещё задачи

7. Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 ч 30 мин.
а) Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее чем на 1 мин 51 с.
б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин?

10. Задано $n>2$. Двое по очереди отмечают точки на окружности: первый — красным цветом, второй — синим. Когда отмечено по n точек каждого цвета, игра заканчивается. Затем каждый игрок находит на окружности дугу наибольшей длины с концами своего цвета, на которой больше нет отмеченных точек. У кого длина дуги больше — тот выиграл (в случае равенства длин дуг, а также при отсутствии таких дуг у обоих игроков — ничья). Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

Сириус, 8 класс, 11 июня 2016 г, www.ashap.info/Uroki/Sirius/1606/index.html