ГМТ и замечательные точки треугольника

Определение. ГМТ - это геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию. Для доказательства того, что некоторое множество точек является ГМТ надо доказать два факта:
а) для каждая точки множества условие выполнено;
б) если для точки условие выполнено, она принадлежит множеству.

00. Опишите как ГМТ а) окружность; б) серединный перпендикуляр к отрезку; в) биссектрису угла.
01. Найдите ГМТ
а) удаленных от данной точки O на расстояние не более r;
б) удаленных от точки A не дальше, чем от точки B;
в) равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.
02. Докажите, что
а) три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.
б) эта точка является цетром окружности, проходящей через все вершины треугольника (*описанная* окружность).
3. Докажите, что
а) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;
б) эта точка является центром окружности, касающейся всех сторон треугольника (*вписанная* окружность);
в) 3 прямые продолжают стороны некоторого треугольника. Докажите, что есть 4 точки, равноудаленные от этих прямых (это центры вписанной и трёх *вневписанных* окружностей).
4. а) Дан треугольник ABC. Найдите ГТМ X, лежащих внутри треугольника и таких, что площади треугольников ABX и ACX равны.
б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. (Эта точка называется *центром масс* треугольника.)
в) Докажите, что центр масс делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
5. Найдите ГМТ X внутри треугольник ABC таких, что площади треугольников
а) ABX и ACX относятся как 2:1;
б) BCX и ACX относятся как 3:1;
в) Пусть M – точка пересения ГМТ из предыдущих пунктов. В каком отношении делит сторону AC прямая BM?
6. Найдите ГМТ X внутри ABC таких, что площади треугольников ABX и ACX относятся как $AB:AC$.

ГМТ: Дополнительные задачи

ГМТ1. Докажите теоремы:
Теорема о биссектрисе. Если AL – биссектриса треугольника ABC, то $BL:LC=BA:AC$.
Теорема Чевы. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC выбраны *точки* C', B', A'. Тогда отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке ⇔ $AB'/B'C \cdot CA'/A'B \cdot BC'/C'A = 1$.
ГМТ2. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ X, таких, что треугольники ABX и ABC равновелики.

ГМТ3. Дан прямой угол. Найдите ГМТ середин отрезков длины a с концами на сторонах данного угла.

ГМТ4. Найдите геометрическое место четвертых вершин квадратов, таких, что оставшиеся три вершины лежат на двух данных перпендикулярных прямых.

ГМТ5. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 так, что $AC_1=AB_1$, $BA_1=BC_1$ и $CA_1=CB_1$. Докажите, что перпендикуляры восстановленные в точках C_1, A_1 и B_1 к сторонам AB, BC и CA соответственно пересекаются в одной точке.

ГМТ6. На сторонах треугольника ABC вовне его построены правильные треугольники ABC', BCA' и CAB'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

ГМТ7. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.