Посредники в неравенствах

0. Точка X лежит по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB, что и точка A. Докажите, что AX<BX.

Идея. Чтобы доказать неравенство A<B можно выбрать *посредник* P и доказать, например, A<P и P≤B. Искусство состоит в выборе P. В зад.0 посредником была длина ломаной.

1. Докажите, что а) $1000001^5 > 99999^6$.; б) $\sqrt[3]{1001} > \sqrt[4]{9999}$.

2. На шахматной доске стоит несколько королей, каждый бьет не более одного другого. Докажите, что королей не более 32.

3. В клетках таблицы 10×10 стоят 100 различных чисел. Макс выбрал в каждой строке максимальное число, и из этих 10 чисел выбрал наименьшее. Минька выбрал в каждом столбце наименьшее число, и из этих 10 чисел выбрал наибольшее. У кого из них число больше?

При сравнении сумм/произведений посредники можно выбирать для каждого слагаемого/сомножителя.

4. Докажите, что 100<1+3/2+4/3+5/4+….+101/100<134.

5. Докажите, что $½·2/3·4/5·6/7· … ·(p-1)/p \geq 1/n$ (в знаменателях – (n-1) первых простых чисел).

6. Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник – квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.

Посредники могут образовывать цепочку: $A<P_1<P_2<…<P_n<B$. Часто такую цепочку можно получить, начав менять A шаг за шагом, пока не получится B.

7. Треугольник лежит внутри другого треугольника. Докажите, что

а) периметр внутреннего – меньше;

б) наибольшая сторона внутреннего не превосходит наибольшей стороны внешнего.

8. Есть 100 пар дедов Морозов со Снегурочками, каждый выше своей Снегурочки. Докажите, что если распределить Снегурочек по росту (самому высокому – самую высокую, и т.д.), то все равно каждый дед Мороз окажется выше доставшейся ему Снегурочки.

Дополнительные задачи

ПН1. 100 плохишей получили каждый по бочке варенья и корзине печенья. У каждого вес варенья отличается от веса печенья (в ту или другую сторону) не более чем на 5 кг. Докажите, что если и бочки, и корзины пронумеровать по убыванию веса, то у емкостей с одинаковыми номерами веса содержимого будут отличаться не более, чем на 5 кг.

ПН2. Юра и Яша имеют по экземпляру одной и той же клетчатой таблицы 5×5, заполненной 25 различными числами. Юра выбирает наибольшее число в таблице и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, затем выбирает наибольшее из оставшихся чисел и вычеркивает строку и столбец, содержащие это число, и т.д. Яша производит аналогичные действия, но выбирает наименьшие числа. Докажите, что сумма чисел, выбранных Яшей не больше суммы чисел, выбранных Юрой.

ПН3. Выбрано n попарно взаимно простых натуральных чисел, никакое из них не делится на другие. Докажите, что их сумма не меньше n^2.