Формула Пика

Конспект занятия

1. Внутри квадрата отметили 10 точек, а также все 4 вершины. После квадрат разбили на треугольники так, чтобы все вершины треугольников были отмеченными точками и других отмеченных точек ни внутри, ни на границе треугольников нет. Сколько могло получиться треугольников?
Идея решения: счет углов.

Формула Пика. Вершины многоугольника (не обязательно выпуклого) расположены в узлах клетчатой бумаги с клетками размера 1×1. Внутри его лежит n узлов, а на границе m узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n+\frac{m}{2}-1$.

Идея применить рассуждения из первой задачи для доказательства формулы Пика приводит нас к следующему плану:
I. Любой многоугольник можно разбить на простые треугольники (треугольник с вершинами в узлах сетки называется *простым*, если ни внутри, ни на сторонах нет других узлов).
II. Площадь простого треугольника равна ½.
III. Непосредственное доказательство формулы Пика.

2. Доказательство пункта **I** разбивается на следующие шаги:
а) любой многоугольник (кроме треугольника) можно разбить диагональю на два меньших.
б) любой многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники.
в) любой треугольник можно разбить на простые треугольники.

3. Пункт **III** можно вывести из первых пунктов и счета углов. Остается доказать пункт **II**.

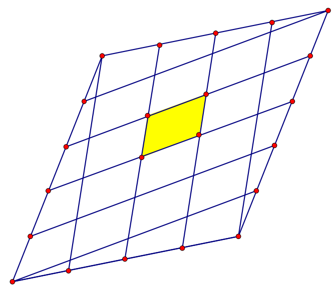
Прыжком будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную относительно любой из двух других вершин.

Минимальным будем называть простой прямоугольный треугольник с катетами в 1 клетку.

4. Докажем, что прыжками можно перевести любой простой треугольник в минимальный.
а) при прыжке простой треугольник переходит в простой, сохраняя при этом площадь.
б) простой треугольник не может быть остроугольным, при этом простой прямоугольный треугольник – это минимальный треугольник.
в) при прыжке относительно вершины тупого угла периметр треугольника уменьшается.
г) периметр простого треугольника не может постоянно уменьшаться.

Дополнительные задачи.

5. Три кузнечика в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке. В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?



6. Одну пару параллельных сторон параллелограмма разбили на 4 равных отрезка, другую пару – на пять равных отрезков. Провели отрезки как на рисунке. Чему равна площадь выделенной фигуры, если площадь первоначального параллелограмма равна 1?