Разворачивание сумм и произведений

Легко вычислить сумму многих слагаемых, когда все они одинаковы: сложение заменяется на умножение. А если слагаемые разные? Тогда можно попытаться разбить их на группы с одинаковыми суммами. Если это получится, то количество слагаемых перестанет быть важным. Когда есть слагаемые разных знаков, полезно выделить группы с нулевой суммой и отбросить их.

1. Найдите алгебраическую сумму 6-16+26-36+46-....-1996+2006-2016.

2. Найдите сумму 6+26+46+…+2006.

3. Найдите сумму всех несократимых правильных дробей вида $n/729$.

4. Найдите алгебраическую сумму $-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+100^2$

Конечно, в большинстве сумм слагаемые так просто не сгруппируешь. Однако часто группировка становится возможной после разбиения слагаемых «на части», то есть представления каждого из данных слагаемых в виде суммы или разности. Понятно, что такое представление может быть сделано многими способами. Сумейте выбрать части так, чтобы их было удобнее группировать. Аналогичный прием помогает считать «длинные» произведения.

5. Найдите произведение $(1+1/2)\cdot(1+1/3)\cdot(1+1/4)\cdot\ \ldots\ \cdot(1+1/100)$.

Метод телескопических сумм как раз и состоит в представлении каждого слагаемого в виде разности так, чтобы почти все члены «развернутой» суммы взаимно уничтожились с соседями. Кажется, что он применим только к небольшому списку искусственно подобранных сумм. Однако, если мы «подозреваем» формулу $F(n)$ для суммы n первых членов, это немедленно дает нам представление n-го члена как разности $F(n)-F(n-1)$. Например, чтобы доказать формулу $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, запишем сумму как $1+(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+\ldots+(n^2-(n-1)^2) = (1-1^2)+(2^2-2^2)+(3^2-3^2)+\ldots((n-1)^2-(n-1)^2)+n^2 = n^2$. Точно так же можно вычислять и *телескопические произведения*.

6. Найдите сумму $1/1\cdot2 + 1/2\cdot3 + 1/3\cdot4 + \ldots+1/99\cdot100$.

7. Найдите произведение $(1-1/4)\cdot(1-1/9)\cdot(1-1/16)\cdot\ \ldots\ \cdot(1-1/10000)$.

8. Докажите, что $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$.

9. Докажите, что при $m>3$ выполнено неравенство $2^m<m!$.

10. При каких натуральных m выполнено неравенство $3^m> 7m^2$?

11. Угадайте формулу для суммы $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$ и докажите её.

Метод сравнения вычисляет сумму двумя способами, и сравнивая результаты, мы получаем уравнение для суммы. Например, если $S=1+q+q^2+\ldots+q^n$ тогда, то $qS= q+q^2+\ldots+q^{n+1} = S-1+ q^{n+1}$. Из уравнения $qS=S-1+ q^{n+1}$ находим $S=(q^{n+1}-1)/(q-1)$.

12. Найдите сумму $2-2/3+2/3^2-2/3^3+\ldots+2/3^{100}$.

13. Обозначим 3_n число, записанное n тройками. Найдите сумму $3+3_2+3_3+\ldots+3_{100}$.

14. Найдите формулу для суммы $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

Суммы: дополнительная порция

РС1. Найдите сумму $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\ldots+100\cdot103$.

РС2. Найдите формулу для суммы $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

РС3. Докажите, что $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\ldots+1/n^2<2$.