

## ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ И ОБХОДЫ-1

На этом занятии в графе допустимы кратные рёбра и циклы.

**Определение.** Путь, проходящий по каждому ребру (ориентированного или неориентированного) графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

**Теорема 1 (необходимость существования эйлеровых путей и циклов).** а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечетны, а степени всех остальных вершин четны. б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин четны.

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь

- а) проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу;
- б) сверх того несамопересекающийся (но, возможно, самокасающийся).

**Лемма 3.** Если в графе степени всех вершин четны, то его можно представить в виде объединения циклов так, что каждое ребро входит ровно в один цикл.

**Теорема 4 (достаточность существования эйлеровых путей и циклов).** Дан связный граф.

- а) Если степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл;
- б) Если степени ровно двух вершин нечетны, то в нем есть эйлеров путь с концами в нечетных вершинах.

### 4\*. Алгоритм Флэри (обхода эйлера графа по эйлеровому циклу).

0. Начинаем обход с произвольной вершины.

- 1. Идём по любому ребру, кроме моста. Если таких нет, идём по мосту.
- 2. Стираем пройденные рёбра. Если образовались изолированные вершины, стираем и их.
- 3. Если есть ещё рёбра, продолжаем обход с п. 1

5. Из куска проволоки длиной 12 дециметров требуется спаять каркас куба с ребром в 1 дм. На какое наименьшее число частей придется предварительно разрезать этот кусок?

6. Докажите аналог теорем 1 и 4 для ориентированных графов.

7. Город в плане выглядит как квадрат  $3 \times 3$ , каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

8. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата  $4 \times 4$  представить в виде объединения

- а) восьми ломаных длиной 5;
- б) пяти ломаных длиной 8?