

ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ И ОБХОДЫ

Определение. Путь, проходящий по каждому ребру (ориентированного или неориентированного) графа ровно один раз, называется *эйлеровым*.
Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.

Теорема 1. а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь. Тогда степени двух концов этого пути нечетны, а степени всех остальных вершин четны.

б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин четны.

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей так, что с любой можно перейти на любую, не сходя с этих окружностей. Докажите, что тогда существует замкнутый путь

а) проходящий по всем участкам всех окружностей ровно по разу;

б) сверх того несамопересекающийся (но, возможно, самокасающийся).

Лемма 3. Если в графе степени всех вершин четны, то его можно представить в виде объединения циклов так, что каждое ребро входит ровно в один цикл.

Теорема 4. Дан связный граф.

а) Если степени всех вершин четны, то в нем есть эйлеров цикл;

б) Если степени ровно двух вершин нечетны, то в нем есть эйлеров путь с концами в нечетных вершинах.

5. Из куска проволоки длиной 12 дециметров требуется спаять каркас куба с ребром в 1 дм. На какое наименьшее число частей придется предварительно разрезать этот кусок?

6. В стране Оз некоторые пары городов связаны прямыми односторонними авиалиниями. В каждом городе прилетающих и улетающих авиалиний поровну. Докажите, что девочка Элли может совершить путешествие, пролетев каждой авиалинией ровно по разу.

7. Город в плане выглядит как квадрат 3×3 , каждая сторона квартала-квадратика – участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

8. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5;

б) пяти ломаных длиной 8?

9. а) На каждой горизонтали и каждой вертикали клетчатой доски стоит по 4 или по 6 фигур. Всегда ли можно убрать несколько фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло ровно по две фигуры?

б*) Тот же вопрос, если на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски стоит не менее двух фигур.

10.** На кодовом замке 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Для открытия кодового замка нужно нажать 4 кнопки в определенном порядке (при этом предыдущие нажатия не важны). Докажите, что замок можно наверняка открыть, сделав не более 10003 нажатий.

Для самостоятельного решения

ЭП1. В Вишкелэнде все авиарейсы беспосадочные, летают туда и обратно, и из любого города (с пересадками) можно долететь в любой другой. Все рейсы поделены между двумя компаниями так, что для любой пары городов все прямые рейсы между ними принадлежат только одной компании, и из любого города рейсами одной компании можно улететь в такое же число городов, в какое и рейсами другой компании. Агенту 007 предписано путешествовать, меняя компанию при каждой пересадке. Докажите, что он может из столицы перелететь в любой город.

ЭП2. В стране Центумии некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит ровно 100 дорог. Пучком называется набор из 10 дорог, выходящих из одного города. Докажите, что все дороги можно разбить на несколько пучков.

Сириус, 7 класс, 12 мая 2016 г, www.ashap.info/Uroki/Sirius/1605/index.html